Integrales de línea

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción **1**

2. Caminos **1**

3. Integral de línea de campos escalares **2**

3.1. Definición . . . 2
3.2. Motivación . . . 2
3.3. Longitud de arco . . . 4
3.4. Interpretación geométrica . . . 4
3.5. Algunos ejemplos . . . 5

4. Integral de línea de campos vectoriales **5**

4.1. Definición . . . 5
4.2. Motivación . . . 6
4.3. Otras notaciones . . . 7
4.4. Propiedades . . . 8
4.4.1. Propiedades básicas . . . 8
4.4.2. Cambios de parámetro . . . 9
4.5. Relación con la integral de línea de campos escalares . . . 11
4.5.1. La integral de la componente tangencial . . . 11
4.5.2. Aplicaciones físicas . . . 12

5. Independencia del camino **12**

5.1. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow) para integrales de línea . . . 12
5.2. Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea . . . 14
5.3. Caracterización de los campos vectoriales gradiente . . . 16
5.4. Una condición necesaria para que un campo vectorial sea un gradiente . . . 17
5.5. Aplicaciones físicas . . . 19
5.5.1. Potencial newtoniano . . . 19
5.5.2. Principio del trabajo y la energía . . . 20

5.5.3. Principio de conservación de la energía mecánica: campos conservativos 20

1. Introducción

En cursos anteriores se estudió la integral de Riemann simple $\int_a^b f(x)\,dx$, primero para funciones reales definidas y acotadas en intervalos finitos, y luego para funciones no acotadas e intervalos infinitos.

En el Tema 1, el concepto de integral de Riemann fue extendido a funciones reales de variable vectorial (*campos escalares*). Ahora extenderemos la noción de integral en otra dirección. El intervalo $[a,b]$ es reemplazado por una curva en el espacio real p-dimensional ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) definida por una función vectorial $\overline{\alpha}$, y el integrando es un campo escalar f ó vectorial $\overline{f}$ definido y acotado sobre esa curva, llamada *camino de integración*. La integral resultante se llama *integral de línea*, *integral curvilínea* o *integral de contorno*, y se denota por $\int f\,d\overline{\alpha}$ ó $\int \overline{f} \cdot d\overline{\alpha}$, respectivamente (el punto «·» se usa para sugerir el producto escalar de dos vectores).

Las integrales de línea son de capital importancia en matemática pura y aplicada, y también en física: se presentan al estudiar el trabajo, la energía potencial, el flujo de calor, el cambio en la entropía, la circulación de un fluido, y otras cuestiones que involucran el comportamiento de un campo escalar o vectorial a lo largo de una curva.

2. Caminos

Definición 2.1. *Sea $\overline{\alpha} : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ una función vectorial. El conjunto*

$$\{\overline{\alpha}(t) : t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^p$$

se llama gráfica *de la función. Cuando $\overline{\alpha}$ es continua se dice que $\overline{\alpha}$ es un* camino *en $\mathbb{R}^p$, y su gráfica se denomina* curva *descrita por $\overline{\alpha}$.*

Funciones $\overline{\alpha}$ distintas pueden originar el trazado de la misma curva de formas distintas, por ejemplo en direcciones opuestas o con velocidades diferentes. Para ilustrar esta afirmación, considérense

$$\overline{\alpha}_1(t) = (t, 1-t), \qquad \overline{\alpha}_2(t) = (1-t, t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\overline{\beta}_1(t) = (t, 0) \quad (0 \leq t \leq 1), \qquad \overline{\beta}_2(t) = (2t, 0) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right).$$

Definición 2.2. *En la notación de la Definición 2.1, el camino $\overline{\alpha}$ es* cerrado *si $\overline{\alpha}(a) = \overline{\alpha}(b)$. Un camino $\overline{\alpha}$ se dice* regular *si existe $\overline{\alpha}'$ y es continua en $]a,b[$. El camino $\overline{\alpha}$ es* regular a trozos *si $[a,b]$ puede ser descompuesto en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales $\overline{\alpha}$ es regular (Figura 1).*

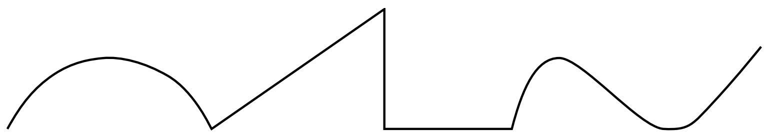

Figura 1. Gráfica de un camino regular a trozos en el plano.

Ejemplo 2.3. *Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^p$, el segmento que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$ viene descrito por el camino regular $\overline{\alpha}(t) = (1-t)\overline{x} + t\overline{y}$ $(0 \leq t \leq 1)$.*

Ejemplo 2.4. *Una circunferencia de centro (a,b) y radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^2$ viene descrita por el camino regular cerrado $\overline{\alpha}(t) = (a + r\cos t, b + r\operatorname{sen} t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.*

3. Integral de línea de campos escalares

3.1. Definición

Definición 3.1. *Sea $\overline{\alpha} : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ un camino regular a trozos, y sea $C = \{\overline{\alpha}(t) : t \in [a,b]\}$ la curva descrita por $\overline{\alpha}$. Sea $\varphi : C \to \mathbb{R}$ un campo escalar acotado. La* integral de línea *de φ a lo largo de C se representa*

$$\int_C \varphi \, ds$$

y se define por

$$\int_C \varphi \, ds = \int_a^b \varphi(\overline{\alpha}(t)) \left\| \overline{\alpha}'(t) \right\| \, dt,$$

siempre que la integral del segundo miembro exista, bien como integral propia o como integral impropia.

Si el camino $\overline{\alpha}$ es cerrado se suele indicar esta circunstancia con la utilización del símbolo $\oint_C$ en vez de $\int_C$.

3.2. Motivación

En la notación anterior, supongamos que $p = 3$, que C representa un alambre y que φ es la densidad de masa, con lo que su integral es la masa total del alambre; o que φ es la temperatura, de modo que su integral, si el alambre tiene longitud 1, representa la temperatura promedio a lo largo de éste.

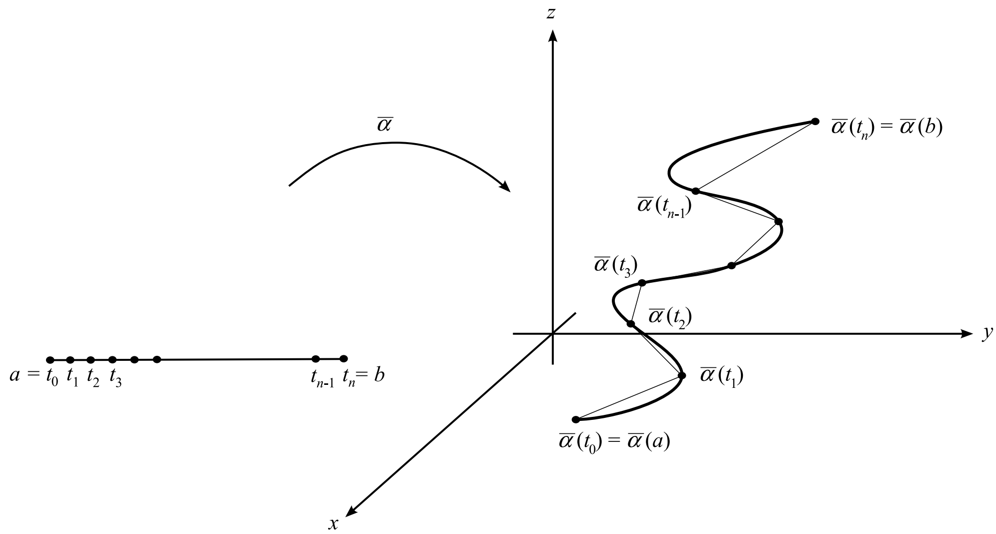

Figura 2. La integral de línea de campos escalares.

Una partición $\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ con nodos equiespaciados da lugar a una partición

$$\{\overline{\alpha}(t_0), \overline{\alpha}(t_1), \ldots, \overline{\alpha}(t_n)\}$$

de C (Figura 2). Pongamos $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ $(i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n)$. Si Δt es suficientemente pequeño, podemos suponer φ constante en el segmento que une $\overline{\alpha}(t_{i-1})$ con $\overline{\alpha}(t_i)$. Por el teorema del valor medio, la masa de este segmento del alambre será entonces

$$\varphi\left(\overline{\alpha}(t_{i-1})\right)\|\overline{\alpha}(t_i) - \overline{\alpha}(t_{i-1})\| \approx \varphi\left(\overline{\alpha}(t_{i-1})\right)\left\|\overline{\alpha}'(t_{i-1})\right\|\Delta t \qquad (i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n),$$

y la masa total, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\overline{\alpha}(t_{i-1})\right)\left\|\overline{\alpha}'(t_{i-1})\right\|\Delta t.$$

Tomando límites para $n \to \infty$ se obtiene como masa total

$$\int_a^b \varphi\left(\overline{\alpha}(t)\right)\left\|\overline{\alpha}'(t)\right\|\, dt = \int_C \varphi\, ds.$$

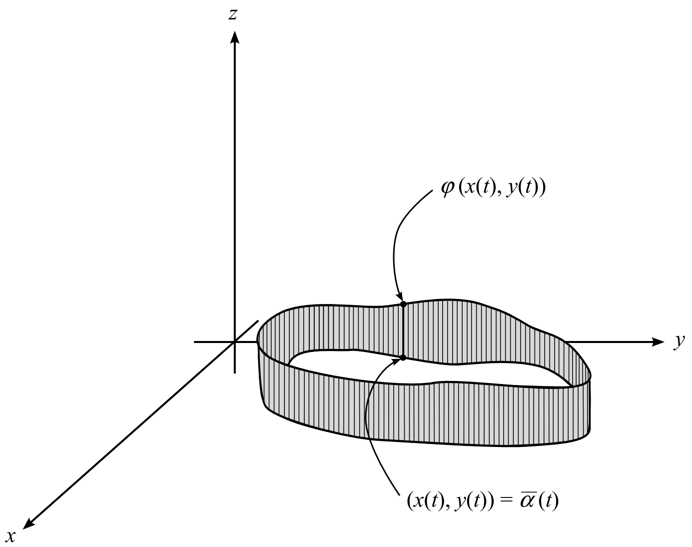

Figura 3. La integral de línea de campos escalares como área de una valla.

3.3. Longitud de arco

Nótese que para $\varphi \equiv 1$, la aproximación anterior viene a determinar la longitud de C:

$$L = \int_a^b \left\|\overline{\alpha}'(t)\right\| \, dt,$$

lo cual motiva la definición de la *función longitud de arco* mediante:

$$s(u) = \int_a^u \left\|\overline{\alpha}'(t)\right\| \, dt \qquad (u \in [a,b]),$$

cuya derivada es:

$$s'(t) = \left\|\overline{\alpha}'(t)\right\| \qquad (t \in [a,b]).$$

3.4. Interpretación geométrica

El enfoque de la Sección 3.2 también muestra que cuando $p = 2$ y $\varphi = \varphi(x,y) \geq 0$, la integral de línea de φ tiene una interpretación geométrica como el «área de una valla». Podemos construir una «valla» cuya base sea la curva C y cuya altura en $(x,y) \in C$ sea $\varphi(x,y)$ (Figura 3). Si $\overline{\alpha}$ recorre C una sola vez, la integral $\int_C \varphi \, ds$ representa el área de un lado de la valla.

3.5. Algunos ejemplos

Ejemplo 3.2. *Hallar la longitud de la circunferencia* $\overline{\alpha}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$*, donde* $r > 0$*. ¿Qué ocurre si* $0 \le t \le 4\pi$*?*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\overline{\alpha}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t), \qquad \|\overline{\alpha}'(t)\| = \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2\,t + r^2\cos^2 t} = r \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

así que

$$\int_C \|\overline{\alpha}'(t)\|\;dt = r\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r,$$

como cabía esperar.

Si $0 \le t \le 4\pi$ hubiéramos obtenido $4\pi r$, porque la circunferencia se recorrería dos veces. □

Ejemplo 3.3. *Sea C la hélice de parametrización* $\overline{\alpha} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\overline{\alpha}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$*, y sea* $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$*. Evaluar la integral* $\int_C \varphi\;ds$*.*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\overline{\alpha}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t, 1), \qquad \|\overline{\alpha}'(t)\| = \sqrt{\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi(\overline{\alpha}(t)) = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t + t^2 = 1 + t^2 \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Por tanto,

$$\int_C \varphi\;ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + t^2)\;dt = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(3 + 4\pi^2)$$

es el valor de la integral pedida. □

4. Integral de línea de campos vectoriales

4.1. Definición

Definición 4.1. *Sea $\overline{\alpha}$ un camino regular a trozos en $\mathbb{R}^p$, definido en $[a,b]$. Sea $\overline{f}$ un campo vectorial definido y acotado sobre la gráfica C de $\overline{\alpha}$. La* integral de línea *de $\overline{f}$ a lo largo de C se representa*

$$\int_C \overline{f}\cdot d\overline{\alpha} \qquad \text{ó} \qquad \int_C \overline{f}\cdot ds$$

y se define por

$$\int_C \overline{f}\cdot d\overline{\alpha} = \int_a^b \overline{f}(\overline{\alpha}(t))\cdot \overline{\alpha}'(t)\,dt,$$

siempre que la integral del segundo miembro (en cuyo integrando «$\cdot$» denota el producto escalar de $\mathbb{R}^p$) exista, bien como integral propia o como integral impropia.

Al igual que ocurre con las integrales de línea de campos escalares, si el camino $\overline{\alpha}$ es cerrado se suele indicar esta circunstancia escribiendo $\oint_C$ en vez de $\int_C$.

4.2. Motivación

Sea $\overline{f}$ un campo de fuerzas en el espacio y supongamos que una partícula se encuentra sometida a la acción del campo; por ejemplo, podemos considerar una carga unitaria en un campo eléctrico, o una masa unitaria en un campo gravitacional. Dicha partícula se moverá siguiendo una trayectoria $\overline{\alpha}$. Un concepto físico importante

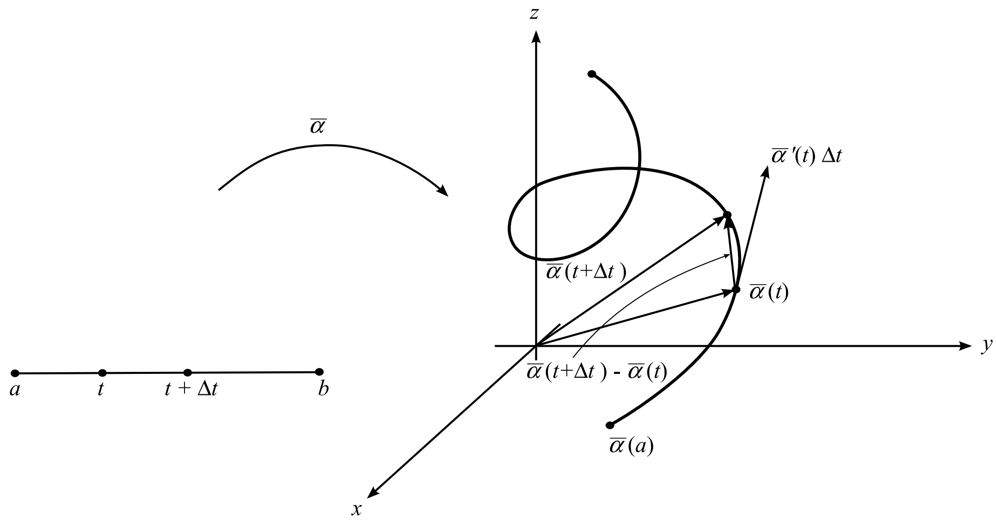

Figura 4. La integral de línea de campos vectoriales.

es el de *trabajo* realizado por la fuerza $\overline{f}$ en este desplazamiento. Si $\overline{\alpha}$ es un desplazamiento rectilíneo en la dirección dada por el vector $\overline{d}$, y si $\overline{f}$ es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por $\overline{f}$ al mover la partícula a lo largo de la trayectoria $\overline{\alpha}$ es $\overline{f} \cdot \overline{d}$, esto es, el producto de la fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza.

Si la trayectoria es curvilínea podemos intentar aproximarla por un número finito de desplazamientos rectilíneos. A medida que t varía en un intervalo de amplitud Δt, en el que podemos suponer que $\overline{f}$ es constante si Δt es suficientemente pequeño, la partícula se mueve de $\overline{\alpha}(t)$ a $\overline{\alpha}(t+\Delta t)$, de modo que el desplazamiento efectuado es $\Delta\overline{s} = \overline{\alpha}(t+\Delta t) - \overline{\alpha}(t)$. Del teorema del valor medio, para Δt pequeño obtenemos la aproximación $\Delta\overline{s} \approx \overline{\alpha}'(t)\Delta t$ (Figura 4). Por tanto, aproximadamente:

$$\overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \Delta\overline{s} \approx \overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t)\Delta t.$$

Subdividiendo el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, con $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$, encontramos que el trabajo realizado por $\overline{f}$ es, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{f}(\overline{\alpha}(t_{i-1})) \cdot [\overline{\alpha}(t_i) - \overline{\alpha}(t_{i-1})] \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{f}(\overline{\alpha}(t_{i-1})) \cdot \overline{\alpha}'(t_{i-1})\Delta t.$$

Cuando $n \to \infty$ esta aproximación se vuelve cada vez mejor, de modo que es razonable definir el trabajo como el límite de la suma anterior para $n \to \infty$. Pero este límite no es otro que la integral

$$\int_a^b \overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t)\, dt.$$

4.3. Otras notaciones

Si $\overline{f} = (f_1, \ldots, f_p)$ y $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ se expresan en función de sus componentes, la integral de línea también se escribe en la forma

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_C f_1\, d\alpha_1 + \ldots + f_p\, d\alpha_p.$$

En particular, en el caso bidimensional $(p = 2)$

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_C f_1\, dx + f_2\, dy,$$

y en tres dimensiones $(p = 3)$,

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_C f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz.$$

Las expresiones $\omega = f_1\, dx + f_2\, dy$ y $\omega = f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$ se denominan *1-formas diferenciales* ó *formas diferenciales de grado 1*.

4.4. Propiedades

4.4.1. Propiedades básicas

Enunciamos en primer lugar dos propiedades básicas de las integrales de línea.

Proposición 4.2. *Sea C la curva en $\mathbb{R}^p$ descrita por un camino regular a trozos $\overline{\alpha}$ definido sobre $[a,b]$, y sean $\overline{f}$, $\overline{g}$ campos vectoriales definidos y acotados sobre C. Se verifica:*

(i) **(Linealidad respecto del integrando)** *Para cualesquiera escalares λ, μ,*

$$\int_C (\lambda \overline{f} + \mu \overline{g}) \cdot d\overline{\alpha} = \lambda \int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} + \mu \int_C \overline{g} \cdot d\overline{\alpha}.$$

(ii) **(Aditividad respecto al camino de integración)** *Si C_1, C_2 son las gráficas de $\overline{\alpha}(t)$ al variar t en $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente, con $a < c < b$, entonces*

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_{C_1} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} + \int_{C_2} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha}.$$

El siguiente ejemplo ilustra la dependencia del camino.

Ejemplo 4.3. *Sea el campo vectorial bidimensional*

$$\overline{f}(x,y) = (\sqrt{y}, x^3 + y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0).$$

Calcular la integral de línea de $\overline{f}$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$, a lo largo de los siguientes caminos:

(a) *La recta $x(t) = t$, $y(t) = t$ $(0 \leq t \leq 1)$.*

(b) *El camino $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ $(0 \leq t \leq 1)$.*

RESOLUCIÓN.

(a) Para $0 \leq t \leq 1$, sea $\overline{\alpha}(t) = (t,t)$ y sea C la curva descrita por $\overline{\alpha}$. Entonces $\overline{\alpha}'(t) = (1,1)$, $\overline{f}(\overline{\alpha}(t)) = (\sqrt{t}, t^3 + t)$, $\overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t) = \sqrt{t} + t^3 + t$. Por tanto:

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t)\, dt = \frac{17}{12}.$$

(b) Para $0 \leq t \leq 1$, sea $\overline{\alpha}(t) = (t^2, t^3)$ y sea C la curva descrita por $\overline{\alpha}$. Entonces $\overline{\alpha}'(t) = (2t, 3t^2)$, $\overline{f}(\overline{\alpha}(t)) =$

$(t^{3/2}, t^6 + t^3)$, $\overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t) = 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5$. Por tanto:

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_0^1 (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5)\, dt = \frac{59}{42}.$$

Obsérvese que en (a) y (b) se han obtenido resultados diferentes. □

Calculemos ahora el apartado (b) del Ejemplo 4.3 a lo largo de la misma curva, pero con distinta representación paramétrica. Si para $0 \le t \le 1$ tomamos $\overline{\beta}(t) = (t, t^{3/2})$, encontramos que

$$\overline{\beta}'(t) = \left(1, \frac{3}{2}\sqrt{t}\right), \qquad \overline{f}(\overline{\beta}(t)) = (t^{3/4}, t^3 + t^{3/2}), \qquad \overline{f}(\overline{\beta}(t)) \cdot \overline{\beta}'(t) = t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{7/2} + \frac{3}{2}t^2.$$

Por tanto,

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\beta} = \int_0^1 \left(t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{7/2} + \frac{3}{2}t^2\right) dt = \frac{59}{42}.$$

El Ejemplo 4.3 pone de manifiesto que **la integral de línea no depende sólo de los puntos inicial y final, sino también de la curva que los une**. Sin embargo, el cálculo precedente sugiere que el valor de esta integral es **independiente de la representación paramétrica de la curva**, siempre y cuando **conserve la orientación**. En el apartado siguiente demostraremos esta propiedad general.

4.4.2. Cambios de parámetro

Sea $\overline{\alpha}$ un camino definido en $[a,b]$, y sea u una función real con derivada continua y no nula en $[c,d]$, y recorrido $[a,b]$. La función

$$\overline{\beta}(t) = \overline{\alpha}(u(t)) \qquad (t \in [c,d])$$

es un camino con la misma gráfica C que $\overline{\alpha}$.

Definición 4.4. *Dos caminos $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ relacionados en la forma anterior se denominan* equivalentes. *Se dice que proporcionan distintas* parametrizaciones *o* representaciones paramétricas *de la curva C, y que u define una* reparametrización *o un* cambio de parámetro. *Además (Figura 5):*

- *Si $u' > 0$ entonces u es creciente en $[c,d]$, y $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ originan C en la misma dirección. Se dice en este caso que u* conserva la orientación.
- *Si $u' < 0$ entonces u es decreciente en $[c,d]$, y $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ originan C en direcciones opuestas. Se dice en este caso que u* invierte la orientación.

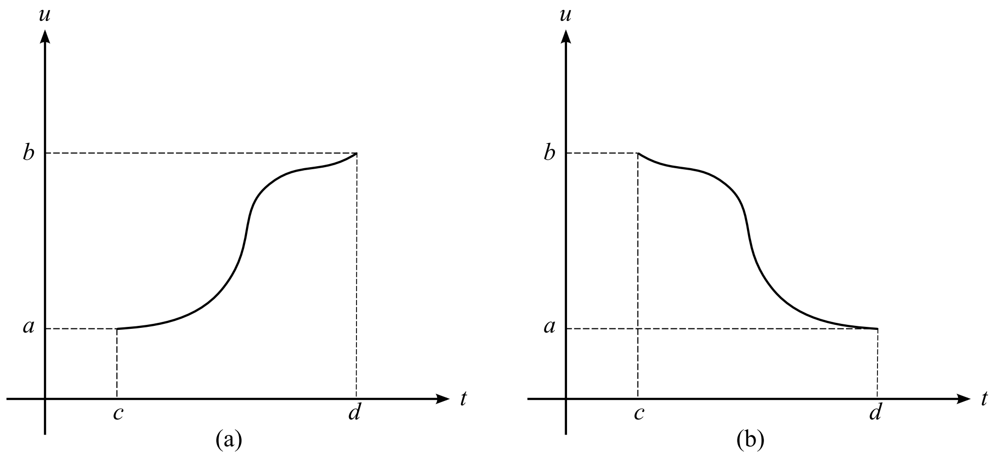

Figura 5. Cambio de parámetro definido por $u = u(t)$. En (a) u preserva la orientación, y en (b) la invierte.

El Teorema 4.5 demuestra que una integral de línea no varía al efectuar un cambio de parámetro que conserva la orientación, pero cambia de signo si la orientación se invierte. Se supone que $\overline{f}$ es un campo vectorial definido y acotado sobre C, y que las integrales involucradas existen.

Teorema 4.5. *Si $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ son dos caminos regulares a trozos equivalentes, entonces*

$$\int_C \overline{f}\cdot d\overline{\alpha} = \int_C \overline{f}\cdot d\overline{\beta}$$

si $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ originan C en la misma dirección, y

$$\int_C \overline{f}\cdot d\overline{\alpha} = -\int_C \overline{f}\cdot d\overline{\beta}$$

si $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ originan C en direcciones opuestas.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el resultado para caminos regulares, pues aplicando luego la propiedad de aditividad respecto al camino de integración se deduce su validez para caminos regulares a trozos.

Como $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ son equivalentes se tiene $\overline{\beta}(t) = \overline{\alpha}(u(t))$ $(t \in [c,d])$, siendo $\overline{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ y $u : [c,d] \to [a,b]$ con derivada continua y no nula. Por la regla de la cadena,

$$\overline{\beta}'(t) = \overline{\alpha}'(u(t))u'(t) \qquad (t \in [c,d]).$$

Efectuando el cambio de variable $u(t) = v$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\beta} &= \int_c^d \overline{f}(\overline{\beta}(t)) \cdot \overline{\beta}'(t)\, dt = \int_c^d \overline{f}[\overline{\alpha}(u(t))] \cdot \overline{\alpha}'(u(t))u'(t)\, dt \\
&= \int_{u(c)}^{u(d)} \overline{f}(\overline{\alpha}(v)) \cdot \overline{\alpha}'(v)\, dv = \pm \int_a^b \overline{f}(\overline{\alpha}(v)) \cdot \overline{\alpha}'(v)\, dv \\
&= \pm \int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha},
\end{aligned}$$

donde se toma el signo «+» cuando $u(c) = a$ y $u(d) = b$, y el signo «−» cuando $u(c) = b$ y $u(d) = a$. □

4.5. Relación con la integral de línea de campos escalares

4.5.1. La integral de la componente tangencial

Si $\overline{f}$ es un campo vectorial definido en C y $\overline{\alpha}$ es una parametrización de C con $\overline{\alpha}'(t) \neq \overline{0}$ $(t \in [a,b])$, consideramos el campo escalar

$$\varphi(\overline{\alpha}(t)) = \overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{T}(t) \qquad (t \in [a,b]),$$

donde

$$\overline{T}(t) = \frac{\overline{\alpha}'(t)}{\|\overline{\alpha}'(t)\|} \qquad (t \in [a,b])$$

es el vector tangente unitario en cada punto de C. Entonces

$$\overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t) = \overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{T}(t)\|\overline{\alpha}'(t)\| = \varphi(\overline{\alpha}(t))\|\overline{\alpha}'(t)\| \qquad (t \in [a,b]).$$

Consecuentemente,

$$\int_C \varphi\, ds = \int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha}.$$

Esta relación expresa que $\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha}$ es igual a la integral de línea de la componente tangencial $\varphi(\overline{\alpha}(t)) = \overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{T}(t)$ $(t \in [a,b])$ de $\overline{f}$ a lo largo de $\overline{\alpha}$.

Así pues, para calcular una integral de línea de un campo vectorial $\overline{f}$ a lo largo de un camino $\overline{\alpha}$ podemos usar directamente la Definición 4.1 o bien hallar la integral de línea de la componente tangencial de $\overline{f}$ a lo largo de $\overline{\alpha}$, dependiendo de lo que sea más sencillo o más apropiado.

4.5.2. Aplicaciones físicas

En la notación del apartado anterior, cuando $\overline{f}$ representa una velocidad el producto $\varphi = \overline{f} \cdot \overline{T}$ es la componente tangencial de la velocidad, y

$$\int_C \varphi \, ds = \int_C \overline{f} \cdot \overline{T} \, ds$$

es la *integral de flujo* de $\overline{f}$ a lo largo de C. Si C es cerrada, esta integral de flujo se denomina *circulación* de $\overline{f}$ a lo largo de C. La terminología proviene de la teoría de fluidos.

5. Independencia del camino

Definición 5.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^p$ un abierto. Se dice que S es* conexo por caminos *si todo par de puntos de S se puede unir mediante un camino regular a trozos cuya gráfica esté en S. Más precisamente, un abierto $S \subset \mathbb{R}^p$ es* conexo por caminos *si dados $\overline{a}, \overline{b} \in S$, existe un camino regular a trozos $\overline{\alpha}$ definido en un intervalo $[a,b]$ tal que $\overline{\alpha}(t) \in S$ para cada $t \in [a,b]$, con $\overline{\alpha}(a) = \overline{a}$ y $\overline{\alpha}(b) = \overline{b}$.*

Definición 5.2. *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^p$ es* conexo *si no puede ser expresado como unión disjunta de abiertos no vacíos.*

Se demuestra que **un abierto $S \subset \mathbb{R}^p$ es conexo por caminos si, y sólo si, es conexo**.

Definición 5.3. *Sea S abierto y conexo, y sea $\overline{f}$ un campo vectorial continuo en S. Dados $\overline{a}, \overline{b} \in S$, se dice que la integral de línea de $\overline{f}$ es* independiente del camino que une $\overline{a}$ y $\overline{b}$ *si su valor depende únicamente de los puntos $\overline{a}$ y $\overline{b}$ y no del camino que los une. Si ello ocurre cualesquiera sean $\overline{a}, \overline{b} \in S$, se dice que la integral de línea de $\overline{f}$ es* independiente del camino en S.

Para poder responder a la pregunta de qué campos vectoriales tienen integrales de línea independientes del camino, vamos a extender el primer y segundo teoremas fundamentales del cálculo a las integrales de línea.

5.1. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow) para integrales de línea

Recordemos que el segundo teorema fundamental del cálculo o *regla de Barrow* establece que si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua con derivada $\varphi' :]a,b[\to \mathbb{R}$ continua y existe $\int_a^b \varphi'(t) \, dt$, entonces

$$\int_a^b \varphi'(t) \, dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Enunciamos a continuación una generalización de esta regla para integrales de línea, que esencialmente establece que **la integral de línea de un gradiente continuo es independiente del camino** en cualquier conjunto abierto conexo S. De esta generalización también se desprende que **la integral de línea de un gradiente continuo es nula a lo largo de cualquier camino cerrado regular a trozos** contenido en S. Veremos más adelante que **los gradientes son los únicos campos vectoriales continuos con esta propiedad**.

Teorema 5.4 (Regla de Barrow para integrales de línea)**.** *Sea φ un campo escalar diferenciable con gradiente continuo $\nabla\varphi$ en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^p$. Para dos puntos cualesquiera $\overline{a}$, $\overline{b}$ unidos por un camino regular a trozos $\overline{\alpha}$ contenido en S, se verifica:*

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \nabla\varphi \cdot d\overline{\alpha} = \varphi(\overline{b}) - \varphi(\overline{a}).$$

DEMOSTRACIÓN. Elijamos $\overline{a}, \overline{b} \in S$ y unámoslos mediante un camino regular a trozos $\overline{\alpha}$ situado en S, definido en un intervalo $[a,b]$.

Supongamos primero que $\overline{\alpha}$ es regular en $[a,b]$. La integral de línea de $\nabla\varphi$ entre $\overline{a}$ y $\overline{b}$ a lo largo de $\overline{\alpha}$ viene dada por

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \nabla\varphi \cdot d\overline{\alpha} = \int_a^b \nabla\varphi(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t)\, dt.$$

Por la regla de la cadena

$$\nabla\varphi(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t) = g'(t) \qquad (t \in [a,b]),$$

donde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ está definida como

$$g(t) = \varphi(\overline{\alpha}(t)) \qquad (t \in [a,b]).$$

La derivada g' es continua en $]a,b[$ porque $\nabla\varphi$ es continua en S y $\overline{\alpha}$ es regular. De la regla de Barrow para funciones de una variable se sigue que

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \nabla\varphi \cdot d\overline{\alpha} = \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a) = \varphi(\overline{\alpha}(b)) - \varphi(\overline{\alpha}(a)) = \varphi(\overline{b}) - \varphi(\overline{a}).$$

Esto prueba el teorema si $\overline{\alpha}$ es regular.

Cuando $\overline{\alpha}$ es regular a trozos, efectuamos una partición de $[a,b]$ en un número finito, digamos r, de subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ en cada uno de los cuales $\overline{\alpha}$ es regular, y teniendo en cuenta la propiedad de aditividad de las integrales de línea aplicamos el resultado anterior a cada subintervalo para obtener

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \nabla\varphi \cdot d\overline{\alpha} = \sum_{k=1}^{r} \int_{\overline{\alpha}(t_{k-1})}^{\overline{\alpha}(t_k)} \nabla\varphi \cdot d\overline{\alpha} = \sum_{k=1}^{r} \left[\varphi\left(\overline{\alpha}(t_k)\right) - \varphi\left(\overline{\alpha}(t_{k-1})\right)\right] = \varphi(\overline{b}) - \varphi(\overline{a}),$$

como pretendíamos. □

5.2. Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea

Recordemos que el primer teorema fundamental del cálculo establece que la integral indefinida de una función continua f tiene una derivada igual a f. Más precisamente: si

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

entonces $\varphi'(x) = f(x)$ en los puntos de continuidad de f.

Para extender este resultado a integrales de línea integramos un campo vectorial $\overline{f}$ continuo en un abierto conexo S a lo largo de una curva regular a trozos C entre un punto fijo $\overline{a} \in S$ y un punto $\overline{x} \in S$ cualquiera:

$$\varphi(\overline{x}) = \int_{\overline{a}}^{\overline{x}} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha},$$

donde $\overline{\alpha}$ es una parametrización de C. Puesto que S es conexo, cada $\overline{x} \in S$ puede ser alcanzado desde $\overline{a}$ por una curva de este tipo. Al objeto de que esta definición carezca de ambigüedad, necesitamos asegurarnos de que la integral depende únicamente de $\overline{x}$ y no del camino utilizado para unir $\overline{a}$ con $\overline{x}$. Por consiguiente, es natural exigir que la integral de línea de $\overline{f}$ sea independiente del camino en S. En esas condiciones tenemos:

Teorema 5.5 (Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea)**.** *Sea $\overline{f}$ un campo vectorial continuo en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^p$. Supongamos que la integral de línea de $\overline{f}$ es independiente del camino en S. Sea $\overline{a} \in S$, y definamos un campo escalar φ en S mediante*

$$\varphi(\overline{x}) = \int_{\overline{a}}^{\overline{x}} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} \qquad (\overline{x} \in S),$$

donde $\overline{\alpha}$ es un camino regular a trozos de S que une $\overline{a}$ con $\overline{x}$. Entonces existe el gradiente de φ y es igual a $\overline{f}$:

$$\nabla\varphi(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}) \qquad (\overline{x} \in S).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\overline{f}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \ldots, f_p(\overline{x}))$ $(\overline{x} \in S)$, se trata de ver que $\partial \varphi / \partial x_k(\overline{x})$ existe y es igual a $f_k(\overline{x})$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq p)$, para cada $\overline{x} \in S$.

Fijado $\overline{x} \in S$, sea $B(\overline{x}; r)$ una bola cerrada de centro $\overline{x}$ y radio $r > 0$ contenida en S, y sea $\overline{y}$ un vector unitario. Entonces $\overline{x} + h\overline{y} \in B(\overline{x}; r) \subset S$ $(h \in \mathbb{R},\ 0 < |h| < r)$. Si $0 < |h| < r$, usando la propiedad de aditividad de las integrales de línea podemos escribir

$$\frac{\varphi(\overline{x} + h\overline{y}) - \varphi(\overline{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_{\overline{x}}^{\overline{x} + h\overline{y}} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha}.$$

Como el camino que une $\overline{x}$ con $\overline{x} + h\overline{y}$ puede ser cualquiera, tomamos el segmento rectilíneo $\overline{\alpha}(t) = \overline{x} + th\overline{y}$ $(0 \leq t \leq 1)$. Ya que $\overline{\alpha}'(t) = h\overline{y}$,

$$\frac{\varphi(\overline{x} + h\overline{y}) - \varphi(\overline{x})}{h} = \int_0^1 \overline{f}(\overline{x} + th\overline{y}) \cdot \overline{y}\, dt.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq p$. Cuando $\overline{y} = \overline{e}_k$ (k-ésimo vector unitario canónico), el cambio de variable $u = ht$ conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\overline{x} + h\overline{e}_k) - \varphi(\overline{x})}{h} &= \int_0^1 \overline{f}(\overline{x} + th\overline{e}_k) \cdot \overline{e}_k\, dt \\ &= \int_0^1 f_k(\overline{x} + th\overline{e}_k)\, dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h f_k(\overline{x} + u\overline{e}_k)\, du \\ &= \frac{g(h) - g(0)}{h}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$g(t) = \int_0^t f_k(\overline{x} + u\overline{e}_k)\, du \qquad (|t| < r).$$

Como f_k es continua en S, el primer teorema fundamental del cálculo para integrales simples asegura que existe $g'(t)$ $(|t| < r)$, y que

$$g'(t) = f_k(\overline{x} + t\overline{e}_k) \qquad (|t| < r).$$

En particular, $g'(0) = f_k(\overline{x})$. Haciendo $h \to 0$ en (1) encontramos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(\overline{x} + h\overline{e}_k) - \varphi(\overline{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = f_k(\overline{x}) \qquad (k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq p).$$

La arbitrariedad de $\overline{x} \in S$ completa la demostración. □

5.3. Caracterización de los campos vectoriales gradiente

El primer y el segundo teoremas fundamentales del cálculo para integrales de línea expresan que **una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea un gradiente en un conjunto abierto conexo es que su integral sea independiente del camino**. Ahora veremos que esta condición es **equivalente a que la integral de línea del campo vectorial** en cuestión **sea nula a lo largo de cualquier camino cerrado regular a trozos**. Pero antes daremos una definición.

Definición 5.6. *Si un campo vectorial $\overline{f}$ es el gradiente de un campo escalar φ entonces φ se llama* función potencial *de $\overline{f}$.*

Teorema 5.7. *Sea $\overline{f}$ un campo vectorial continuo en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^p$. Son equivalentes:*

(i) $\overline{f} = \nabla\varphi$ *para cierta función potencial φ en S.*

(ii) La integral de línea de $\overline{f}$ es independiente del camino en S.

(iii) La integral de línea de $\overline{f}$ a lo largo de cualquier camino cerrado regular a trozos contenido en S es nula.

DEMOSTRACIÓN. Que (ii) implica (i) sigue del primer teorema fundamental, mientras que (i) implica (iii) en virtud del segundo teorema fundamental. Para completar la demostración estableceremos que (iii) implica (ii). Sean C_1, C_2 dos curvas regulares a trozos en S, con los mismos extremos. Supongamos que C_1 es la gráfica de una función $\overline{\alpha} : [a,b] \to S$, y que C_2 es la gráfica de una función $\overline{\beta} : [c,d] \to S$. Definimos

$$\overline{\gamma}(t) = \begin{cases} \overline{\alpha}(a+2t(b-a)), & 0 \le t \le 1/2 \\ \overline{\beta}(d+(2t-1)(c-d)), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Entonces $\overline{\gamma}$ describe una curva cerrada C tal que

$$\oint_C \overline{f} \cdot d\overline{\gamma} = \int_{C_1} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} - \int_{C_2} \overline{f} \cdot d\overline{\beta}.$$

Ya que, por (iii), $\oint_C \overline{f} \cdot d\overline{\gamma} = 0$, tenemos

$$\int_{C_1} \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_{C_2} \overline{f} \cdot d\overline{\beta},$$

por lo que la integral de $\overline{f}$ es independiente del camino. □

Si $\oint_C \overline{f}\cdot d\overline{\alpha} \neq 0$ para alguna curva cerrada C, entonces $\overline{f}$ no es un gradiente. Por otra parte, si $\oint_C \overline{f}\cdot d\overline{\alpha} = 0$ para una o para infinitas curvas cerradas, no se deduce necesariamente que $\overline{f}$ sea un gradiente, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.8. *Sea $\overline{f}(x,y) = (x,xy)$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$, y para $r>0$ sea C_r la circunferencia de centro el origen y radio r, parametrizada mediante $\overline{\alpha}_r(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$. Entonces*

$$\oint_{C_r} \overline{f}\cdot d\overline{\alpha}_r = 0 \qquad (r>0),$$

pero $\overline{f}$ no es un gradiente en $\mathbb{R}^2$.

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_r} \overline{f}\cdot d\overline{\alpha}_r &= \int_0^{2\pi} (r\cos t, r^2\operatorname{sen} t\cos t)\cdot(-r\operatorname{sen} t, r\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-r^2\operatorname{sen} t\cos t + r^3\operatorname{sen} t\cos^2 t\right)\,dt \\
&= -\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} 2t\,dt + r^3\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\cos^2 t\,dt \\
&= \frac{r^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{r^3}{3}\cos^3 t\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \neq 0 = \frac{\partial}{\partial y}(x)$$

cuando $y\neq 0$. Como se justificará a continuación (Teorema 5.9), esto impide que $\overline{f}$ sea un gradiente en $\mathbb{R}^2$. □

5.4. Una condición necesaria para que un campo vectorial sea un gradiente

Teorema 5.9. *Sean $S\subset\mathbb{R}^p$ un abierto y $\overline{f} = (f_1,\ldots,f_p)$ un campo vectorial de clase $C^1(S)$. Si $\overline{f}$ es un gradiente en S, entonces*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\overline{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) \qquad (\overline{x}\in S;\ i,j\in\mathbb{N},\ 1\leq i,j\leq p). \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una función potencial φ tal que $\overline{f} = \nabla\varphi$, de modo que

$$f_j = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \qquad (j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le p).$$

Por tanto

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) \qquad (i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i, j \le p),$$

y también

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \qquad (i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i, j \le p).$$

Ya que $\partial f_j/\partial x_i$ y $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i, j \le p)$ son continuas, el teorema de Schwarz sobre igualdad de las derivadas cruzadas prueba que

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (i, j \in \mathbb{N},\ 1 \le i, j \le p),$$

como se pretendía. □

Observación 5.10. *Cuando $p = 2$ y $\overline{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es un campo vectorial de clase C^1, la condición (2) se reduce a la siguiente:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Cuando $p = 3$ y $\overline{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es un campo vectorial de clase C^1, la condición (2) se convierte en:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

El rotacional *del campo vectorial $\overline{f}$ es otro campo vectorial definido por*

$$\operatorname{rot} \overline{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Así pues, (2) se expresa abreviadamente diciendo que $\operatorname{rot} \overline{f} = \overline{0}$*, o que el campo $\overline{f}$ es* irrotacional. *Retomaremos este concepto más adelante.*

Como muestra el siguiente ejemplo, la condición necesaria del Teorema 5.9 **no** es, en general, suficiente (a menos que el dominio S sea *simplemente conexo*; también volveremos sobre este punto más adelante).

Ejemplo 5.11. *Sea* $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Sea* $\overline{f}$ *definido en* S *por*

$$\overline{f}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

aunque $\overline{f}$ *no es un gradiente en* S.

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad ((x,y) \in S).$$

Sin embargo, si $\overline{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ es una parametrización de la circunferencia unidad C, entonces

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt = 2\pi,$$

lo cual impide que $\overline{f}$ sea un gradiente (Teorema 5.7). □

5.5. Aplicaciones físicas

Recordemos que si un campo vectorial $\overline{f}$ es el gradiente de un campo escalar φ entonces φ se llama *función potencial* para $\overline{f}$. En $\mathbb{R}^3$, los conjuntos de nivel de φ se denominan *superficies equipotenciales*; en $\mathbb{R}^2$, *líneas equipotenciales*. Así, por ejemplo, si φ es una temperatura las superficies o líneas equipotenciales se denominan *isotermas*, y si es una presión, *isobaras*.

Ejemplo 5.12. *Sea* $\varphi(x,y,z) = r^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, *con* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$. *Se tiene que* $\nabla r^n = nr^{n-2}\overline{r}$. *Luego,* φ *es un potencial del campo vectorial* $nr^{n-2}\overline{r}$. *Las superficies equipotenciales de* φ *son esferas concéntricas, centradas en el origen.*

5.5.1. Potencial newtoniano

La ley de gravitación de Newton establece que $\overline{f} = -GmMr^{-3}\overline{r}$, esto es: la fuerza $\overline{f}$ que ejerce una partícula de masa M sobre otra de masa m es un vector de longitud GmM/r^2, donde G es constante y r es la distancia entre ambas partículas. Situamos el origen en la partícula de masa M, y llamamos $\overline{r} = (x,y,z)$ al vector de posición que une el origen con la partícula de masa m, de modo que $r = \|\overline{r}\|$ y $-\overline{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de $\overline{f}$. Haciendo $n = -1$ en el ejemplo anterior vemos que $\overline{f} = \nabla\varphi$, siendo φ el campo escalar

$$\varphi(x,y,z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}),$$

que se llama *potencial newtoniano*.

5.5.2. Principio del trabajo y la energía

Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva bajo la acción de un campo de fuerzas $\overline{f}$. Si la velocidad de la partícula en el instante t es $V(t)$, su energía cinética está definida por $mV^2(t)/2$. El *principio del trabajo y la energía* afirma que **la variación de la energía cinética en cualquier intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por $\overline{f}$ en dicho intervalo**.

En efecto, sea $\overline{r}(t)$ la posición de la partícula en el instante $t \in [a,b]$. Queremos probar:

$$\int_{\overline{r}(a)}^{\overline{r}(b)} f \cdot d\overline{r} = \frac{1}{2}mV^2(b) - \frac{1}{2}mV^2(a).$$

La segunda ley de Newton (fuerza = masa · aceleración) establece que

$$\overline{f}(\overline{r}(t)) = m\overline{r}''(t).$$

El vector velocidad es $\overline{v}(t) = \overline{r}'(t)$, y la velocidad es $V(t) = \|\overline{r}'(t)\|$. Por consiguiente,

$$\overline{f}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t) = m\overline{r}''(t) \cdot \overline{r}'(t) = m\overline{v}'(t) \cdot \overline{v}(t) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\overline{v} \cdot \overline{v}(t)) = \frac{1}{2}m\frac{dV^2}{dt}(t).$$

Luego,

$$\int_{\overline{r}(a)}^{\overline{r}(b)} \overline{f} \cdot d\overline{r} = \int_a^b \overline{f}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\, dt = \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{dV^2}{dt}(t)\, dt = \frac{1}{2}mV^2(b) - \frac{1}{2}mV^2(a).$$

5.5.3. Principio de conservación de la energía mecánica: campos conservativos

Sea $\overline{f}$ un campo de fuerzas continuo que tiene un potencial φ en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^2$. El trabajo efectuado por $\overline{f}$ al mover una partícula desde $\overline{a}$ hasta $\overline{x}$ siguiendo un camino regular a trozos situado en S es la variación de la función potencial: $\varphi(\overline{x}) - \varphi(\overline{a})$. Denotando $k(\overline{z})$ la energía cinética de la partícula cuando está situada en $\overline{z}$, el principio del trabajo y la energía entraña que

$$k(\overline{x}) - k(\overline{a}) = \varphi(\overline{x}) - \varphi(\overline{a}),$$

o bien

$$k(\overline{x}) - \varphi(\overline{x}) = k(\overline{a}) - \varphi(\overline{a}).$$

El escalar $-\varphi(\overline{z})$ se llama *energía potencial* de la partícula.

Hemos establecido así el *principio de conservación de la energía mecánica*: **si un campo de fuerzas es un gradiente, la suma de las energías cinética y potencial permanece constante**.

Un campo de fuerzas con una función potencial se llama *conservativo* porque la energía total (cinética más potencial) se conserva. En este tipo de campos no se efectúa trabajo alguno al mover una partícula alrededor de una curva cerrada, volviendo al punto de partida.

Un campo de fuerzas no será conservativo si existe fricción o viscosidad en el sistema, puesto que éstas convierten la energía mecánica en calorífica.