



FACULTAD DE INGENIERÍA

Carrera de **INGENIERÍA CIVIL**

**ANÁLISIS DE VIBRACIONES FORZADAS EN
VIGAS TIMOSHENKO UTILIZANDO EL
CONCEPTO DE CAMPO DE DESPLAZAMIENTO
ACOPLADO**

Tesis para optar al título profesional de:

INGENIERO CIVIL

Autor:

JAMIL ADRIAN AZAÑA MARGARITO

Asesor:

Ing. ELISEO JUAN ZARATE PEREZ

<https://orcid.org/0000-0002-3946-4924>

Lima - Perú

2023

JURADO EVALUADOR

Jurado 1 Presidente	JULIO CHRISTIAN QUESADA LLANTO	42831273
	Nombre y Apellidos	N.º DNI

Jurado 2	OMART DEMETRIO TELLO MALPARTIDA	08644876
	Nombre y Apellidos	N.º DNI

Jurado 3	ELISEO ZARATE PEREZ	42415810
	Nombre y Apellidos	N.º DNI

INFORME DE SIMILITUD



Página 2 of 58 - Descripción general de integridad

Identificador de la entrega trn:oid::1:3023565338

5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...




Filtrado desde el informe

- ▶ Texto citado

Exclusiones


- ▶ N.º de coincidencias excluidas

Fuentes principales

- 4%  Fuentes de Internet
- 3%  Publicaciones
- 5%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Texto oculto**
3 caracteres sospechosos en N.º de páginas
El texto es alterado para mezclarse con el fondo blanco del documento.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

DEDICATORIA

Dedico mi tesis a mis padres, gracias por su amor infinito, sacrificio y apoyo a lo largo de mi desarrollo profesional.

Espero que este logro haga realidad el sueño que imaginaron para mí.

AGRADECIMIENTO

A la Universidad Privada del Norte, por proporcionarme los recursos necesarios para llevar a cabo esta investigación.

A mi asesor, por su inestimable apoyo en el desarrollo de este y futuros aportes a la comunidad científica.

A mis docentes y colegas, con quienes consolidé temas relativos a la dinámica de estructuras.

ÍNDICE

JURADO EVALUADOR	2
INFORME DE SIMILITUD	3
DEDICATORIA	4
AGRADECIMIENTO	5
LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE SÍMBOLOS (NOMENCLATURA)	10
RESUMEN	11
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	13
1.1. Realidad Problemática	13
1.2. Justificación	16
1.3. Formulación del problema	16
1.3.1. Pregunta de investigación general	16
1.3.2. Preguntas de investigación específicas	16
1.4. Objetivos	17
1.4.1. Objetivo general	17
1.4.2. Objetivos específicos	17
1.5. Hipótesis	17
1.5.1. Hipótesis general	17
1.5.2. Hipótesis específicas	18
CAPÍTULO II: METODOLOGÍA	19

2.1.	Recopilación de datos	19
2.2.	Población y muestra	21
2.3.	Campo de desplazamientos	21
2.4.	Campo de deformaciones	22
2.5.	Ecuaciones de equilibrio	22
2.6.	Método de campo de desplazamiento acoplado	24
2.6.1.	Función admisible de rotación - Caso viga con voladizo	25
2.6.2.	Función admisible de rotación - Caso viga empotrada – apoyada	27
2.7.	Principio de conservación de la energía	28
2.7.1.	Caso viga con voladizo	29
2.7.2.	Caso viga empotrada – apoyada	31
2.8.	Vibraciones forzadas	33
2.8.1.	Vibraciones forzadas en viga con voladizo	34
2.8.2.	Vibraciones forzadas en viga empotrada – apoyada:	34
CAPÍTULO III: RESULTADOS		37
CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES		47
REFERENCIAS		51
ANEXOS		55

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Ilustración de secuencia metodológica.....	19
Figura 2	Cinemática de flexión de la teoría de vigas Timoshenko comparada con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.....	22
Figura 3	Viga con voladizo con carga armónica sobre la masa ubicada en el extremo.....	25
Figura 4	Viga empotrada – apoyada con carga armónica sobre la masa ubicada en el centro de luz.....	27
Figura 5	Distribución de deformaciones de la viga con voladizo a lo largo de su longitud cuando se somete a una carga puntual transversal $F_0 = 1\text{ N}$ moviéndose a una velocidad $V_f = 27.395\text{ m/s}$ en $t = 0.5T_a$	37
Figura 6	Distribución de deformaciones de la viga empotrada – apoyada a lo largo de su longitud cuando se somete a una carga puntual transversal $F_0 = 1\text{ N}$ moviéndose a una velocidad $V_f = 27.395\text{ m/s}$ en $t = 0.5T_a$	39
Figura 7	Validación de desplazamientos lineales máximos para la viga con voladizo.....	41
Figura 8	Validación de desplazamientos no lineales máximos para la viga con voladizo.....	42
Figura 9	Validación de desplazamientos lineales máximos para la viga empotrada – apoyada.....	44
Figura 10	Validación de desplazamientos no lineales máximos para la viga empotrada – apoyada.....	45

LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Desplazamientos Máximos (mm) Lineales y No Lineales para Viga con Voladizo con Distintas Relaciones de Esbeltez para Distintas Magnitudes de Carga.....	40
Tabla 2	Desplazamientos Máximos (mm) Lineales y No Lineales para Viga Empotrada – Apoyada con Distintas Relaciones de Esbeltez para Distintas Magnitudes de Carga.....	43

LISTA DE SÍMBOLOS (NOMENCLATURA)

A	Área de la sección transversal
a	Desplazamiento transversal central
E	Módulo de Young
G	Módulo de cizallamiento
I	Momento de Inercia
k	Factor de corrección de cizallamiento
L	Longitud del elemento
m	Masa de la viga por unidad de longitud
M	Masa concentrada
$\rho(x)$	Carga en la viga
r	Radio de giro
x	Coordenada axial de la viga
z	Coordenada transversal de la viga
β	Relación de esbeltez
T	Energía cinética
U	Energía de deformación
w	Desplazamiento transversal
θ	Rotación total

RESUMEN

La presente investigación plantea la evaluación de desempeño del método de campo de desplazamiento acoplado para el análisis de vigas en construcciones modulares con diferentes condiciones de contorno. Las expresiones para el desplazamiento transversal se deducen a partir de una función admisible de rotación total que se propone mediante métodos de aproximación de funciones en elementos finitos, sobre la base de un coeficiente indeterminado. Posteriormente, la ecuación de movimiento se deriva utilizando el principio de conservación de la energía, luego se emplea el método de Newmark y la técnica de superposición de modos en las ecuaciones obtenidas. Los resultados muestran que el método empleado es adecuado en contextos que se requiere análisis de las vigas de alta esbeltez. Asimismo, fuertes vibraciones se inducen en la viga, esto se debe al posible aumento de la deflexión. El método recomendado es menos complejo que otros métodos energéticos, ya que el esfuerzo computacional se reduce a la mitad. En tal sentido, esta formulación puede utilizarse para el estudio de vibraciones forzadas de estructuras flexibles a cortantes distintos en vigas Timoshenko con distintas condiciones de contorno. De tal forma, el método de campo de desplazamiento acoplado se puede adaptar adecuadamente a otros problemas complejos.

PALABRAS CLAVES: Campo de desplazamiento acoplado, vibración forzada no lineal, vigas Timoshenko, superposición de modos, Método de Newmark.

ABSTRACT

The present investigation proposes the performance evaluation of the coupled displacement field method for the analysis of beams in modular constructions with different boundary conditions. The expressions for the transverse displacement were derived using an allowable function of total rotation. The function was obtained using the finite-element approximation method based on undetermined coefficients. Thus, we make use of the principle of conservation of energy that will allow us to derive the equations of motion. The Newmark method and mode superposition technique were then used to solve the obtained equations. The results showed that the method used was suitable in applications that require the analysis of high-slenderness beams. In this method, strong vibrations were induced in the beam owing to its greater flexibility. The recommended method is less complex than other energy methods because the computational effort is halved. Therefore, this formulation can be applied to conduct the forced vibration of flexible structural members under various shears using Timoshenko beam models under various boundary conditions. Thus, the coupled displacement field method can be used to derive appropriate solutions to other complex problems.

KEYWORDS: Displacement-coupled field method, Timoshenko beams, nonlinear forced vibration, Newmark method, mode superposition method.

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

1.1. Realidad Problemática

La recuperación de la industria manufacturera dentro y posterior a la pandemia del COVID-19 es primordial teniendo en cuenta su impacto desde la perspectiva de la cadena de suministro (Cai & Luo, 2020). Por ejemplo, la industria de la construcción se ha visto significativamente afectada por la pandemia de COVID-19, enfrentándose al desafío de las variaciones en sus procesos constructivos como un importante motor de crecimiento de la economía (Pamidimukkala & Kermanshachi, 2021). Por ejemplo, la construcción modular es un método sostenible e innovador, además de una tendencia importante en arquitectura, ingeniería y construcción (Hwang & Kim, 2022).

La evaluación de la vibración de alta amplitud de las vigas es importante para que ellas sean rentables, más livianas y aumenten la su rigidez; como requisitos básicos en las construcciones modulares. Las vibraciones forzadas en elementos estructurales siempre ha sido un tema con amplios aportes y constante crecimiento científico, especialmente en el ámbito no lineal. La no linealidad geométrica surge de las grandes amplitudes, que producen efectos de estiramiento, impartiendo así un efecto de rigidez a la viga.

Cuando tomamos en cuenta el efecto de alargamiento, la respuesta de amplitud de excitación estructural se presenta como una función de carácter no lineal. Por ejemplo, a partir de los trabajos de (Woinowsky-Krieger, 1950), se reconocieron las formulaciones para vibraciones de gran amplitud de manera correcta, estas consideraron el tipo von Karman de no linealidad involucrada en la relación de desplazamiento de la deformación, evaluando la tensión axial, que se desarrolla debido a las grandes deformaciones con extremos axialmente inamovibles. De la misma forma, (Mei & Decha-Umphai, 1985) utilizaron el método Galerkin multimodo para estudiar la respuesta de vibración forzada no lineal de una viga

sujetada bajo fuerzas armónicas concentradas. Por otro lado, (Bennett & Easley, 2012) estudiaron vibraciones no lineales de vigas bajo fuerzas armónicas concentradas utilizando formulaciones de elementos finitos. De la misma forma, el enfoque se alinea a lo propuesto por (Azrar et al., 1999) para el análisis de vibraciones forzadas de vigas con apoyos límite viscoelásticos. Por otro lado, (Wang & Chou, 1998) emplearon el análisis dinámico no lineal de la viga Timoshenko basándose en la teoría de la gran deflexión, teniendo en cuenta el efecto de acoplamiento de la fuerza de movimiento externa con el peso propio de la viga.

Fan et al. (1998) desarrolló un método para responder a problemas de dinámica no lineal basado en el principio de Hamilton, el análisis espectral, el principio de Lagrange y el método de equilibrio armónico. El método presentado muestra una simplificación del problema dinámico a un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales dependientes de la matriz de masa y rigidez clásica del elemento respectivamente. Orhan (2007) planteó una sola ecuación de diferencia que describe las vibraciones libres forzadas en vigas Timoshenko, aplicando un nuevo método propuesto para describirlas.

Venkateswara Rao et al. (2006) utilizaron el método de campo de desplazamiento acoplado para obtener los campos de desplazamiento lateral y rotación total mediante una ecuación que abarca las vibraciones libres de gran amplitud de vigas flexibles al cizallamiento. Asimismo, en (Korabathina & Koppanati, 2016) aplicaron el método de campo de desplazamiento acoplado para obtener la respuesta de vibración libre lineal en vigas Timoshenko de sección variable.

Posteriormente, se utiliza el método de campo de desplazamiento acoplado para estudiar la respuesta de vibración libre en vigas Timoshenko con cimentación/fundación Pasternak, como se muestra en (Korabathina & Koppanati, 2016). Con este método, la

respuesta vibratoria libre de gran amplitud de placas rectangulares moderadamente gruesas simplemente soportadas se ha estudiado en (Krishna Bhaskar & Meera Saheb, 2016).

Kwak (1998) aplica la no linealidad geométrica de von Karman, y la teoría de deformación por cizallamiento para definir la respuesta de deformación acoplada a partir de ecuaciones de gobierno descritas como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. El método de Galerkin es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales, este método nos permite aplicarlo a sistemas dinámicos diferenciales ordinarios no lineales acoplados, derivando el modelo constante propuesto de este.

Zargar Ershadi et al. (2022) presentan el análisis de vibraciones libres no lineales de una viga Timoshenko rotatoria con una masa en el extremo bajo una fuerza axial, aplicando la teoría de von Karman y el concepto de desplazamiento acoplado con el objetivo de estudiar los efectos de rotación, la fuerza axial y la masa en el extremo sobre las frecuencias naturales, las amplitudes de vibración y las bifurcaciones. Los resultados mostraron que la rotación y la fuerza axial aumentan las frecuencias naturales y reducen las amplitudes, mientras que la masa tiene el efecto contrario. La teoría de von Karman posee gran porcentaje de intervención en los resultados de la investigación, ya que esta considera los efectos de las deformaciones grandes sobre la geometría y la rigidez de la viga rotatoria, usando la aproximación de elementos finitos. De no considerarlo, los resultados serían inversos e inexactos porque no permitiría capturar el fenómeno lineal que ocurre en las estructuras delgadas (bifurcaciones, pandeo, resonancias, etc.).

(Kim et al., 2021) aplica las ecuaciones de Lagrange para la obtención de ecuaciones de movimiento de elementos de vibración forzada no lineal. Y se solucionan aplicando el método IHB (Método de Equilibrio Armónico Incremental). Comparado con el método convencional de Rayleigh-Ritz, la investigación demuestra que el método de campo de

desplazamiento acoplado reduce el número ' $2n$ ' de coeficientes indeterminados a un número ' n ' de coeficientes indeterminados para la función admisible de ' n ' términos asumidos.

1.2. Justificación

A raíz de la creciente importancia de la sostenibilidad y la construcción novedosa, se han dedicado considerables esfuerzos de investigación a los aspectos de ingeniería de la construcción modular. Con los cambios radicales en el uso del espacio tras el estallido de la pandemia de COVID-19 a nivel mundial, se ha vuelto crucial reconsiderar el diseño de los edificios modulares (Hwang & Kim, 2022). Uno de los elementos estructurales básicos ampliamente utilizados para la construcción modular son las vigas. No obstante, la literatura existente no aborda de manera integral los requerimientos recientemente surgidos de los ocupantes y las modificaciones pertinentes relacionadas con los avances de la ingeniería. Por ejemplo, las fuerzas externas que actúan sobre una viga pueden causar múltiples vibraciones. Y en algunos casos, las vibraciones pueden tener una gran amplitud debido a la no linealidad.

1.3. Formulación del problema

1.3.1. Pregunta de investigación general

¿Cuál es el desempeño de la aplicación del concepto de campo de desplazamiento acoplado en el análisis de vibraciones forzadas en vigas Timoshenko con masa concentrada en un punto?

1.3.2. Preguntas de investigación específicas

- a. ¿Qué función admisible de rotación se puede utilizar para las expresiones del desplazamiento transversal de la viga Timoshenko?
- b. ¿Cómo se puede resolver las ecuaciones de movimientos que se obtendrán a partir del principio de conservación de la energía?

- c. ¿Cuáles son las ventajas de aplicar el concepto de campo de desplazamiento acoplado sobre otros métodos energéticos?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Aplicar el concepto de campo de desplazamiento acoplado aplicado al análisis de vibraciones forzadas de vigas en construcciones modulares con diferentes condiciones de contorno.

1.4.2. Objetivos específicos

- a. Determinar una función admisible de rotación total para la viga Timoshenko mediante el método de aproximación por elementos finitos basado en coeficientes indeterminados.
- b. Determinar la solución de las ecuaciones de movimiento obtenidas usando el Método de Newmark y la técnica de superposición de modos.
- c. Comparar el concepto de campo de desplazamiento acoplado con otros métodos energéticos en términos de complejidad y esfuerzo computacional.

1.5. Hipótesis

1.5.1. Hipótesis general

El concepto de campo de desplazamiento acoplado es adecuado para aplicaciones que requieran el análisis de vigas esbeltas, ya que induce vibraciones fuertes debido a una mayor flexibilidad y reduce a la mitad el esfuerzo computacional.

1.5.2. Hipótesis específicas

- a. La función admisible de rotación total obtenida mediante el método de aproximación por elementos finitos basado en coeficientes indeterminados permite derivar las expresiones de desplazamiento transversal a lo largo de la viga con mayor precisión.
- b. El método de Newmark y la técnica de superposición de modos son eficientes para resolver las ecuaciones de movimiento, ya que permiten obtener soluciones estables y convergentes.
- c. El concepto de campo de desplazamiento acoplado tiene una menor complejidad y esfuerzo computacional comparado con otros métodos energéticos, ya que reduce el número de coeficientes a la mitad.

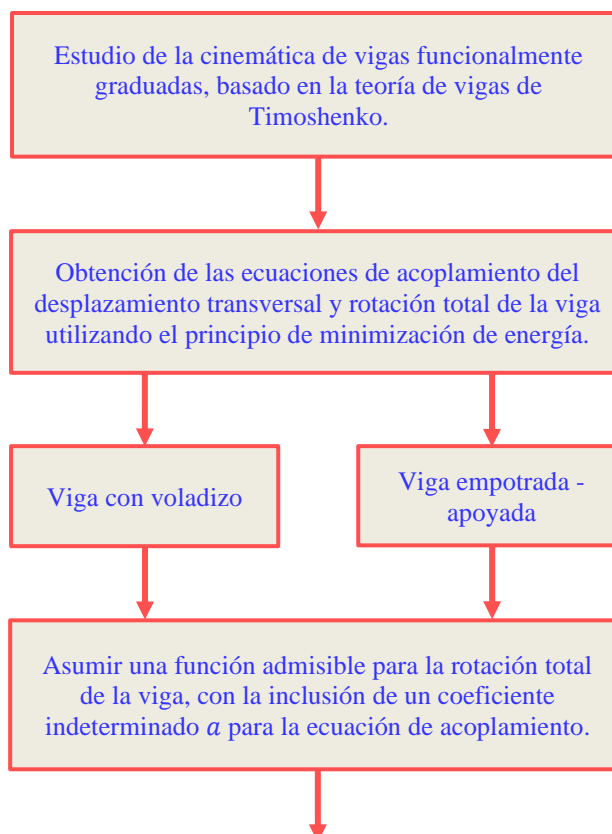
CAPÍTULO II: METODOLOGÍA

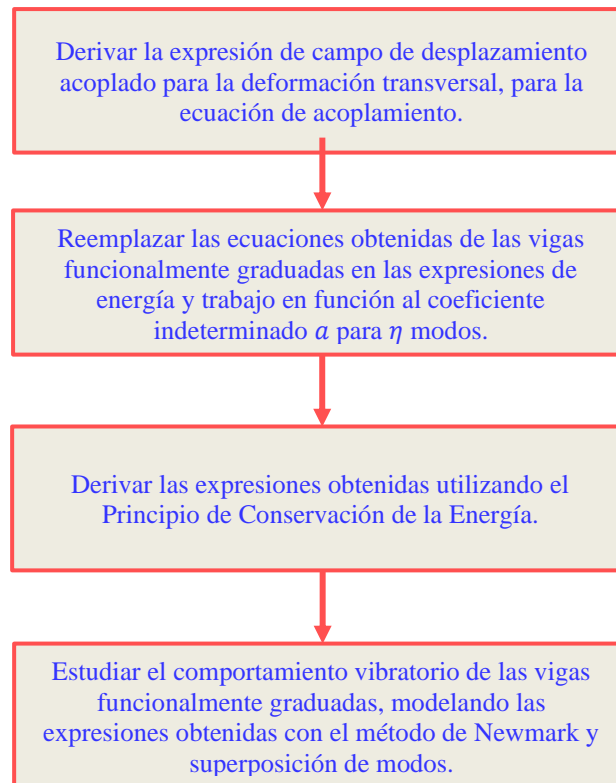
2.1. Recopilación de datos

Para el análisis de resultados se consideró el método de vibraciones forzadas de gran amplitud en vigas *funcionalmente graduadas* con participación de una masa concentrada en un punto x . La Fig. 1 resume la metodología empleada mediante un diagrama de flujo para obtener el análisis de resultados. En tal forma, inicialmente se consideran las relaciones cinemáticas de la viga funcionalmente graduada basada en la teoría de Timoshenko; y la obtención de la ecuación de acoplamiento aplicando el principio de minimización de la energía potencial. Seguidamente, se asume una función admisible para la distribución de la rotación de la viga y la distribución de desplazamiento transversal. Las ecuaciones se derivan para cada modo aplicando el método de campo de desplazamiento acoplado dependiendo de las condiciones de contorno de la viga Timoshenko.

Figura 1

Ilustración de secuencia metodológica





Utilizando las expresiones obtenidas por el método de desplazamiento de campo acoplado, se estudia la respuesta de vibración forzada como la energía cinética y deformación para cada modo de la viga Timoshenko. De la misma forma, se considera el trabajo realizado por la tensión y sus fuerzas externas actuantes. En tal sentido, las ecuaciones de movimiento vibratorio de la viga se derivan a partir del principio de conservación de la energía total.

Finalmente, la ecuación de que describe el movimiento vibratorio forzado debido a una fuerza armónica de excitación se resuelve utilizando el método de Newmark para encontrar los coeficientes indeterminados en el desplazamiento transversal y rotacional de la viga en η modos. Además, se utiliza el método de superposición de modo, sumándose los valores en cada uno de ellos para obtener las respuestas dinámicas en una ubicación específica del desplazamiento transversal y la rotación total de la viga.

2.2. Población y muestra

La elección de una viga Timoshenko funcionalmente graduada se justifica por su capacidad para modelar con precisión el comportamiento vibratorio de estructuras complejas. A diferencia de las vigas clásicas, la teoría de Timoshenko considera tanto la deformación por corte como la inercia rotatoria, lo que la hace adecuada para describir el comportamiento de vigas cortas.

Además, su aplicación en la construcción modular permite abordar las vibraciones fuertes inducidas por la flexibilidad inherente a estas estructuras. Lo que lo convierte en una elección sólida para un análisis avanzado de vibraciones.

2.3. Campo de desplazamientos

La cinemática de una viga funcionalmente graduada, basada en la teoría de la viga de (Timoshenko et al., 1934) y se puede describir como (Fig. 2):

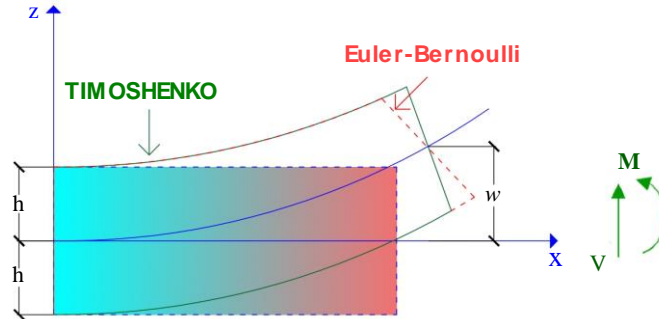
$$\bar{u}(x, z) = z\theta(x) = z\left(\frac{dw}{dx} + \Phi\right) = z\left(\frac{dw}{dx} + \theta\right) \quad (1)$$

$$\bar{w}(x, z) = w(x) \quad (2)$$

Donde \bar{u} y \bar{w} son los desplazamientos axiales y transversales en un punto x de la viga, respectivamente; z es la distancia desde el eje neutro; w es el desplazamiento transversal; θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga; Φ es la rotación de flexión basada en la teoría de Euler-Bernoulli; Finalmente, $\frac{dw}{dx}$ es la deformación por cizallamiento.

Figura 2

Cinemática de flexión de la teoría de vigas Timoshenko comparada con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli



Nota: Adaptado de (Timoshenko et al., 1934).

2.4. Campo de deformaciones

Para las deformaciones normales y angulares siguiendo el sistema de coordenadas, se sigue el trabajo de (Venkateswara Rao et al., 2006), como se muestra en la Fig. 2 y las Ecuaciones (3) y (4).

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = z \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \quad (3)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dx} = \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right) \quad (4)$$

Donde w es el desplazamiento transversal, z es la distancia desde el eje neutro, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, ε_x es la deformación axial que es la derivada del desplazamiento axial, y γ_{xz} es la deformación por cizallamiento que viene a ser la suma de las derivadas del desplazamiento axial y transversal, estas expresiones son necesarias para determinar la energía de deformación U

2.5. Ecuaciones de equilibrio

Se plantean las expresiones para la energía de deformación U de la viga funcionalmente graduada y el trabajo realizado por la carga W que actúa sobre la masa a una

distancia x , están dados por las Ecuaciones (5) y (6), tal y como se presenta en (Venkateswara Rao et al., 2006):

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right)^2 dx \quad (5)$$

$$W_e = \int_0^L P(x)w(x) dx \quad (6)$$

Donde, L es la longitud de la viga, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, w es el desplazamiento transversal, E es el módulo de elasticidad de la viga, I es la inercia de la viga, k es el factor de corrección de cizallamiento, G el módulo de cizallamiento, A es el área de la viga y $P(x)$ la carga actuante en la viga que provoca la vibración forzada.

Aplicamos el principio de minimización de la energía potencial total, este afirma que el desplazamiento y la rotación de una viga funcionalmente graduada en equilibrio son los que hacen que la energía potencial U total de la estructura sea mínima, esto nos sirve para simplificar el análisis, ya que evita tener que aplicar las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en cada punto de la viga. La Ecuación 7 describe el principio, como se muestra en (Korabathina & Koppanati, 2016).

$$\delta(U - W) = 0 \quad (7)$$

Donde, U es la energía de deformación, W la carga actuante, y δ la variable de desplazamiento rotacional y transversal.

A continuación, se presentan las ecuaciones de equilibrio mediante las Ecuaciones (8) y (9), obtenidas de (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$kGA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \right) + P = 0 \quad (8)$$

$$EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} - kGA \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right) = 0 \quad (9)$$

Estas ecuaciones de equilibrio son acopladas y pueden resolverse para la solución a un análisis estático en vigas deformables por cizallamiento. También, se nota que solo la Ecuación (9) no interviene la carga P . Por lo tanto, se emplea la Ecuación (9) para relacionar el desplazamiento transversal con la rotación de la viga Timoshenko, ya que considera el acoplamiento de la rotación total θ y desplazamiento transversal w de la viga que reduce el análisis de vibraciones de dos variables a una sola, que se conoce como el método de campo de desplazamiento acoplado como se explica en la siguiente sección.

2.6. Método de campo de desplazamiento acoplado

En el método de campo de desplazamiento acoplado se asume una función admisible que describe la rotación total θ de la viga que satisface las condiciones de contorno, como se muestran en las Fig. 3 y 4. Para ello, utilizaremos el método de coeficientes indeterminados (residuos ponderados) que consiste en determinar la solución u de las ecuaciones diferenciales $L(u) = f$ con las condiciones de contorno $B_i(u) = 0$. Luego, aproximamos la función como la suma de un conjunto de funciones N_i multiplicadas por coeficientes inicialmente indeterminados a_i

$$u \approx \hat{u} = \sum a_j N_j(x, y \dots) \quad (10)$$

Se puede determinar el valor de a por múltiples criterios, que hacen mínimo el error en un cierto sentido. La calidad de los resultados dependerá de las funciones de aproximación empleadas.

Ejemplo:

Para una viga simplemente apoyada consideramos las condiciones de contorno:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad \wedge \quad v''(0) = v''(L) = 0$$

Obtenemos:

$$v \approx \hat{v} = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \quad (11)$$

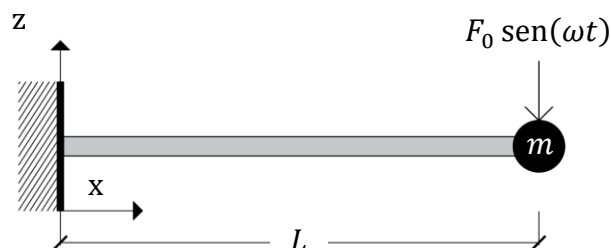
La función $N_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ es muy similar a la solución correcta; a menor escala, $N_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ también contribuye a la solución. Sin embargo, la inclusión de $N_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$, que es ortogonal a la solución exacta, no es adecuada.

El éxito de este método en su forma clásica depende de las funciones de aproximación planteadas. Por ello, su aplicación que se encuentra en la literatura está limitada a ejemplos académicos con geometría, propiedades de los materiales y condiciones de contorno (Scaletti, 2023).

2.6.1. Función admisible de rotación - Caso viga con voladizo

Figura 3

Viga con voladizo con carga armónica sobre la masa ubicada en el extremo.



De la misma forma, la distribución total de la rotación θ a lo largo de la viga simplemente apoyada se asume según la Ecuación (12). Esta función se propone teniendo en cuenta las condiciones de borde de la viga y utilizando métodos y técnicas de parámetros indeterminados y elementos finitos, siguiendo el planteamiento de (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$\theta = a \frac{4\pi}{L} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L} \quad (12)$$

Donde a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, y L la longitud de la viga. Sustituyendo la función θ en la Ecuación (9), se obtiene el campo de desplazamiento acoplado transversal w . De la misma forma, la integración da lugar a la Ecuación (13) que se muestra a continuación, existe concordancia conforme a las constantes E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección de cizallamiento), G (el módulo de cizallamiento) y A (área de la viga) con el planteamiento de (Austin & Pan, 1970), lo que nos indica que las funciones de rotación asumidas con correctas.

$$w = a\chi_1 \quad (13)$$

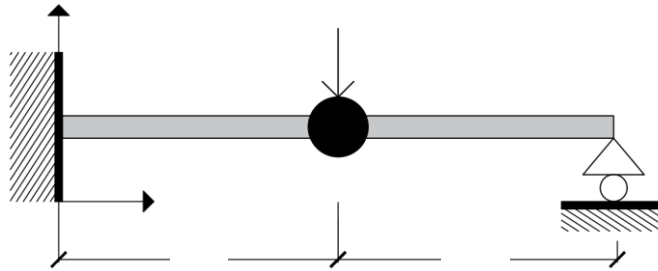
Donde:

$$\chi_1 = \frac{EI}{kGA} \times \left[\frac{2\pi a \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{L}}{L} + \frac{16\pi^2 \cos \frac{4\pi x}{L}}{L^2} \right] \quad (14)$$

2.6.2. Función admisible de rotación - Caso viga empotrada – apoyada

Figura 4

*Viga empotrada – apoyada con carga armónica sobre la masa
ubicada en el centro de luz.*



La distribución total de la rotación θ a lo largo de la viga doblemente empotrada se muestra en la Ecuación (15). Esta función se propone teniendo en cuenta las condiciones de borde de la viga y utilizando métodos y técnicas de parámetros indeterminados y elementos finitos siguiendo el planteamiento de (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$\theta = a \left[\frac{4\pi}{L} \sin \frac{4\pi x}{L} + \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \right] \quad (15)$$

Donde a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, y L la longitud total de la viga. Sustituyendo la función θ en la Ecuación (9). obtenemos el campo de desplazamiento acoplado transversal w , después de la integración se obtiene la Ecuación (16), existe concordancia conforme a las constantes E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección de cizallamiento), G (módulo de cizallamiento) y A (área de la viga) con el planteamiento de (Austin & Pan, 1970), lo que nos indica que las funciones de rotación asumidas son correctas.

$$w = a\chi_2 \quad (16)$$

Donde:

$$\chi_2 = \frac{EI}{kGA} \left[\frac{4a\pi \sin \frac{4\pi x}{L} + 4\pi^2 \sin \frac{2\pi x}{L}}{2L} + \frac{16\pi^2 \cos \frac{4\pi x}{L} - 4\pi^2 \sin \frac{2\pi x}{L}}{L^2} \right] \quad (17)$$

2.7. Principio de conservación de la energía

Conforme se avanza en la obtención de la expresión de campo acoplado para el desplazamiento transversal w para una función admisible θ , las vibraciones forzadas se pueden estudiar aplicando el principio de conservación de la energía en cualquier instante del tiempo, con amortiguamiento despreciable. El principio de conservación de la energía total en cualquier instante del tiempo se establece mediante la Ecuación (18), como se muestra en (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$U + T + W_1 = \text{Constante} \quad (18)$$

Donde W_1 es el trabajo realizado por la tensión que genera la viga debido a deformaciones grandes por la masa concentrada, T es la energía cinética, y U es la energía de deformación. Estas expresiones están dadas en las Ecuaciones (19), (20) y (21), según se presenta en (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{kGA}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right)^2 dx, \quad (19)$$

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \dot{w}^2 dx + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \dot{\theta}^2 dx + \frac{M\dot{w}^2}{2} \Big|_{x = \frac{L}{2}}, \quad (20)$$

$$W_1 = \frac{T_a}{2} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad (21)$$

Donde M es el valor numérico de la masa concentrada, L es la longitud de la viga, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, w es el desplazamiento transversal, ρ es la densidad de masa, E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección de cizallamiento), G (módulo de cizallamiento), A (área de la viga) y T_a es la tensión desarrollada en la viga debido a la deformación que causa la masa concentrada. La expresión T_a se obtiene de Woinowsky-Krieger en la Ecuación (22) como se detalla en (Woinowsky-Krieger, 1950).

$$T_a = \frac{EI}{2Lr^2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (22)$$

Donde L es la longitud de la viga, r es el radio de giro, E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga) y w es el desplazamiento transversal; de la misma forma, la expresión T_a se deriva considerando el tipo de no linealidad de von Karman para que se considere el efecto de grandes deformaciones en la viga.

2.7.1. Caso viga con voladizo

Sustituyendo las expresiones asumidas de θ y w de las Ecuaciones (12) y (13) en las Ecuaciones (19), (20) y (21), las expresiones para U , T y W_1 están dados por las Ecuaciones (23), (24) y (25), siguiendo el proceso de formulación presentado en (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$U = a^2 \frac{EIL}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{16\pi}{L} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right], \quad (23)$$

$$T = \dot{a}^2 \frac{mL}{4} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right] \left[1 + \frac{2M}{mL} \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{I}{A} \left(\frac{\eta\pi}{L} \right)^2 \right\}, \quad (24)$$

$$W_1 = a^4 \frac{EIL}{132r^2} \left(\frac{16\pi}{L}\right)^4 \left[\left(\frac{16\pi}{L}\right)^3 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{kGA} \right]^4 \quad (25)$$

Donde M es el valor numérico de la masa concentrada, m es el valor numérico de la masa de la viga por unidad de longitud, L es la longitud de la viga, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, w es el desplazamiento transversal, ρ es la densidad de masa, E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección de cizallamiento), G (el módulo de cizallamiento), A (área de la viga), r es el radio de giro, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, y η es el número de modos.

Estas expresiones se sustituyen en la Ecuación (18) y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación de balance energético conformado por U que es la energía de deformación, T la energía cinética y W_1 el trabajo realizado:

$$\psi_1 \dot{a}^2 + \psi_2 a^2 + \psi_3 a^4 = Constante \quad (26)$$

Donde:

$$\psi_1 = \frac{mL}{4} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{kGA} \right] \left[1 + \frac{2M}{mL} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{I}{A} \left(\frac{\eta\pi}{L}\right)^2 \right\}, \quad (27)$$

$$\psi_2 = \frac{EIL}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \left[1 + \left(\frac{16\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{kGA} \right], \quad (28)$$

$$\psi_3 = \frac{EIL}{132r^2} \left(\frac{16\pi}{L}\right)^4 \left[\left(\frac{16\pi}{L}\right)^3 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{kGA} \right]^4 \quad (29)$$

Donde M es el valor numérico de la masa concentrada, m es el valor numérico de la masa de la viga por unidad de longitud, L es la longitud de la viga, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, w es el desplazamiento transversal, ρ es la densidad de masa, E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección de cizallamiento), G (el módulo de cizallamiento), A (área de la viga), r es el radio de giro, y η es el número de modos.

2.7.2. Caso viga empotrada – apoyada

Sustituyendo las expresiones asumidas de θ y w de las Ecuaciones (15) y (16) en las Ecuaciones (19), (20) y (21), las expresiones para U , T y W_1 están dados por las Ecuaciones (30), (31) y (32), siguiendo el proceso de formulación presentado en (Venkateswara Rao et al., 1976).

$$U = a^2 \frac{EIL}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \left[1 + \left(\frac{8\pi}{L^2}\right)^2 \frac{EI}{kGA}\right], \quad (30)$$

$$T = a^2 \frac{mL}{8} \left\{ \left[1 + \left(\frac{16\pi}{L^2}\right)^2 \frac{EI}{kGA}\right] \left[\left(\frac{16\pi}{L^2}\right) + \frac{4M}{mL} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{16\pi}{L^2}\right)\right] + \frac{I}{Ar^2} \left(\frac{4\eta\pi}{2L}\right)^3 \right\}, \quad (31)$$

$$W_1 = a^4 \frac{EIL}{48r^2} \left(\frac{16\pi}{L^2}\right)^4 \left[\left(\frac{4\pi}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{4\pi}{L^2}\right)^3 \frac{EI}{kGA}\right]^2 \quad (32)$$

Donde M es el valor numérico de la masa concentrada, m es el valor numérico de la masa de la viga por unidad de longitud, L es la longitud de la viga, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, w es el desplazamiento transversal, ρ es la densidad de masa, E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección

de cizallamiento), G el (módulo de cizallamiento), A (área de la viga), r es el radio de giro, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, y η es el número de modos.

Estas expresiones se sustituyen en la Ecuación (18) y simplificando, obtenemos la siguiente ecuación de balance energético conformado por U que es la energía de deformación, T la energía cinética y W_1 el trabajo realizado:

$$\phi_1 \dot{a}^2 + \phi_2 a^2 + \phi_3 a^4 = Constante \quad (33)$$

Donde:

$$\phi_1 = \frac{mL}{8} \left\{ \left[1 + \left(\frac{16\pi}{L^2} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right] \left[\left(\frac{16\pi}{L^2} \right) + \frac{4M}{mL} \sin^2 \left(\frac{16\pi}{L^2} \right) \right] + \frac{I}{Ar^2} \left(\frac{4\eta\pi}{2L} \right)^3 \right\}, \quad (34)$$

$$\phi_2 = \frac{EIL}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \left[1 + \left(\frac{8\pi}{L^2} \right)^2 \frac{EI}{kGA} \right], \quad (35)$$

$$\phi_3 = \frac{EIL}{48r^2} \left(\frac{16\pi}{L^2} \right)^4 \left[\left(\frac{4\pi}{L^2} \right)^2 + \left(\frac{4\pi}{L^2} \right)^3 \frac{EI}{kGA} \right]^2 \quad (36)$$

Donde M es el valor numérico de la masa concentrada, m es el valor numérico de la masa de la viga por unidad de longitud, L es la longitud de la viga, θ es la rotación total en cualquier punto del eje de la viga, w es el desplazamiento transversal, ρ es la densidad de masa, E (el módulo de elasticidad de la viga), I (inercia de la viga), k (factor de corrección de cizallamiento), G el (módulo de cizallamiento), A (área de la viga), r es el radio de giro, y η es el número de modos.

2.8. Vibraciones forzadas

En esta sección, se establece las condiciones de borde y propiedades para respuesta de vibración forzada de las vigas Timoshenko. El principio de conservación de la energía para η modos, bajo la influencia de la distribución dinámica de la fuerza transversal $f(x, t)$ lo podemos modelar como:

$$U + T + W_1 = W_e = \int_0^L f(x, t)w(x, t)dx \quad (37)$$

Donde $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada sobre la viga, ubicada en $x = x_f$. La fuerza armónica $F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t)$ que actúa en $x = x_f$ se puede modelar como una fuerza distribuida con la popular función delta de Dirac $\delta(x)$ que es una descripción matemática de la carga concentrada que se desplaza, presentado en (Venkateswara Rao et al., 1976):

$$f(x, t) = F_0 \text{sen}(\omega t) \delta(x - x_f) \quad (38)$$

Donde F_0 es el valor máximo de la fuerza, ω es la frecuencia de excitación, t es el tiempo, x es la variable de la posición de la fuerza actuante, x_f es el valor numérico de la ubicación de la fuerza actuante.

Sustituyendo las expresiones de energía de deformación, energía cinética y trabajo realizado por tensión desarrollada debido a la masa (U , T y W_1), obtenemos las siguientes expresiones:

2.8.1. Vibraciones forzadas en viga con voladizo

$$\psi_1 \dot{a}^2 + \psi_2 a^2 + \psi_3 a^4 = \int_0^L f(x, t) w(x, t) dx \quad (39)$$

Donde, ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 son las variables definidas en las Ecuaciones (27) (28) y (29); L es la longitud de la viga, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada que actúa sobre la viga, $w(x, t)$ es el desplazamiento transversal. Aplicando una diferenciación respecto al tiempo, obtenemos la siguiente expresión de la fuerza generalizada para cada modo es similar a la expresión de fuerza generalizada presentada en (Venkateswara Rao et al., 1976):

$$2\psi_1 \ddot{a} + 2\psi_2 \dot{a} + 4\psi_3 a^3 = \int_0^L f(x, t) \chi_1(x) dx \quad (40)$$

Donde, ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 son las variables definidas en las Ecuaciones (27) (28) y (29); L es la longitud de la viga, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada que actúa sobre la viga, $\chi_1(x)$ es el desplazamiento transversal.

2.8.2. Vibraciones forzadas en viga empotrada – apoyada:

$$\phi_1 \dot{a}^2 + \phi_2 a^2 + \phi_3 a^4 = \int_0^L f(x, t) w(x, t) dx \quad (41)$$

Donde, ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son las variables definidas en las Ecuaciones (34) (35) y (36); L es la longitud de la viga, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada que actúa sobre la viga, $w(x, t)$ es el desplazamiento transversal. Aplicando una diferenciación respecto al tiempo, obtenemos la siguiente expresión presentada en (Venkateswara Rao et al., 1976):

$$2\phi_1\ddot{a} + 2\phi_2\dot{a} + 4\phi_3a^3 = \int_0^L f(x, t)\chi_2(x)dx \quad (42)$$

Donde, ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son las variables definidas en las Ecuaciones (34) (35) y (36); L es la longitud de la viga, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada que actúa sobre la viga, $\chi_2(x)$ es el desplazamiento transversal.

En las Ecuaciones (41) y (42), la expresión de fuerza generalizada para cada modo es la misma que la fuerza generalizada correspondiente a η modos proporcionada en (Venkateswara Rao et al., 2006). Aquí $\chi_{1,2}$ se le da los valores de las Ecuaciones (14) y (17) respectivamente y sustituyendo la expresión $f(x, t)$ con el uso de las propiedades de la función delta de Dirac, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para cada la viga con voladizo, y la viga empotrada – apoyada respectivamente bajo las condiciones de carga forzada:

$$2\psi_1\ddot{a} + 2\psi_2\dot{a} + 4\psi_3a^3 = F_0 \text{sen}(\omega t) \chi_1(x_f) \quad (43)$$

$$2\phi_1\ddot{a} + 2\phi_2\dot{a} + 4\phi_3a^3 = F_0 \text{sen}(\omega t) \chi_2(x_f) \quad (44)$$

Donde, ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 son las variables definidas en las Ecuaciones (27) (28) y (29); ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son las variables definidas en las Ecuaciones (34) (35) y (36); L es la longitud de la viga, a es la amplitud transversal máxima no dimensional de la viga, $f(x, t)$ es la fuerza transversal dinámica concentrada que actúa sobre la viga, F_0 es el valor máximo de la fuerza, ω es la frecuencia de excitación, t es el tiempo, $\chi_{1,2}(x)$ son los desplazamientos transversales, y x_f es el valor numérico de la ubicación de la fuerza actuante.

Estas ecuaciones de movimiento se resuelven para los coeficientes indeterminados a para todos los modos $\eta = 1, 2, 3, \dots, \eta_{m\acute{a}x}$ en cada paso de tiempo ($\Delta_t = 0.001 \text{ seg}$) de 0 a 1 segundo utilizando método de Newmark (Newmark, 1959). $\eta_{m\acute{a}x}$ se elige a base de que la solución converja al grado de precisión deseado. Utilizando el método de superposición de modos, las soluciones de ambas ecuaciones de movimiento en cada modo se sustituyen en la expresión de superposición para la obtención de la respuesta dinámica para el desplazamiento transversal w y la rotación total θ respectivamente en un tiempo t_0 y a una distancia x_0 . Entonces, siguiendo los criterios ($t = t_0$ y $x = x_0$) basados en el principio de la técnica de superposición, se dan las siguientes expresiones para ambos tipos de vigas Timoshenko:

$$w(x_0, t_0) = \sum_{\eta=1}^n a_{\eta}(t_0) \chi_{\eta}(x_0) \quad (45)$$

$$\theta(x_0, t_0) = \sum_{\eta=1}^n a_{\eta}(t_0) \xi_{\eta}(x_0) \quad (46)$$

Donde, $w(x_0, t_0)$ es el desplazamiento transversal total de la viga en una ubicación específica, $\theta(x_0, t_0)$ es la rotación total de la viga en una ubicación específica, x_0 es la posición inicial, t_0 el valor inicial del tiempo, n es el número de modos, a_{η} son los coeficientes indeterminados, χ_{η} es el desplazamiento transversal, y ξ_{η} es la función N_n de la función admisible de rotación para cada caso de viga explicada en las Ecuaciones (10) y (11).

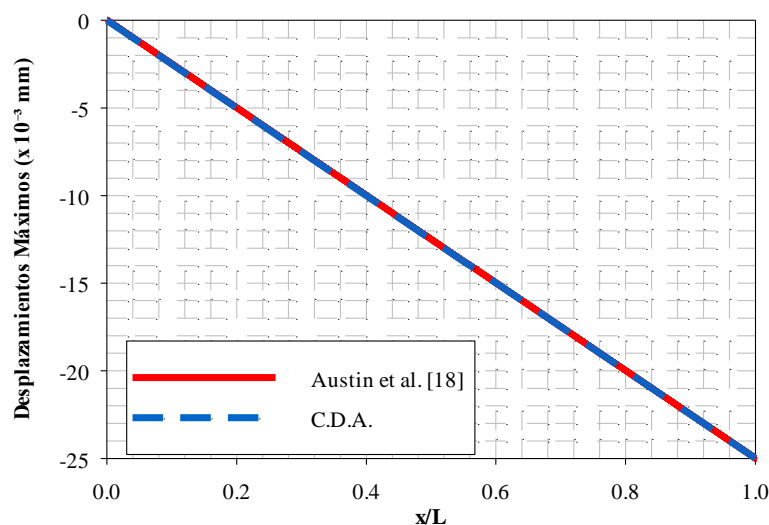
CAPÍTULO III: RESULTADOS

En esta sección, se discuten los resultados obtenidos de la presente formulación basada en el método de campo de desplazamiento acoplado. En primer lugar, se determinó la respuesta de desplazamiento de la vibración forzada sobre las vigas Timoshenko de longitud $L = 4.352$ m, área de la sección transversal $A = 1.31 \times 10^{-3}$ m², momento de inercia $I = 5.71 \times 10^{-7}$ m⁴, módulo de elasticidad $E = 2.02 \times 10^{11}$ N/m², módulo de cizallamiento $G = 7.7 \times 10^{10}$ N/m², densidad de masa $\rho = 15,267$ kg/m³ y factor de corrección de cizallamiento $k = 0.7$ que se somete a una carga puntual transversal de $F_0 = 1$ N que se desplaza a una velocidad $V_f = 27.395$ m/s en $t = 0.5T_a$.

Se ha desarrollado un código en el lenguaje de programación MATLAB para llevar a cabo el análisis de vibraciones forzadas en ambos casos de vigas Timoshenko con distintas condiciones de contorno a partir de las Ecuaciones (45) y (46), cuyos resultados se muestran en las Figuras 5 y 6 respectivamente.

Figura 5

Distribución de deformaciones de la viga con voladizo a lo largo de su longitud cuando se somete a una carga puntual transversal $F_0 = 1$ N moviéndose a una velocidad $V_f = 27.395$ m/s en $t = 0.5T_a$.



Donde T_a es el tiempo requerido por la carga en movimiento para viajar desde un extremo de la viga hasta el otro extremo, se determina utilizando la presente formulación basada en el método del campo de desplazamiento acoplado (CDA) y se valida con los resultados de Austin et al. (1970).

En la Figura 5, se puede observar la distribución de los desplazamientos transversales de la viga en voladizo de la Figura 3 cuando esta se somete a una carga armónica de $f(x, t) = 250 \text{ sen}(50t)$ en el extremo libre $x/L = 1.0$. La deformación parece ser lineal, esto demuestra que la distribución de deformaciones comienza en $t = 0$ porque los modos de velocidades generadas por la carga armónica generadas en un punto $x/L = 0.5$ pueden alcanzar inmediatamente el punto de medida $x/L = 0.25$. Parece evidente el aumento de la amplitud de vibración incrementa considerablemente, pero es más pronunciado en el extremo que en la ubicación del empotramiento.

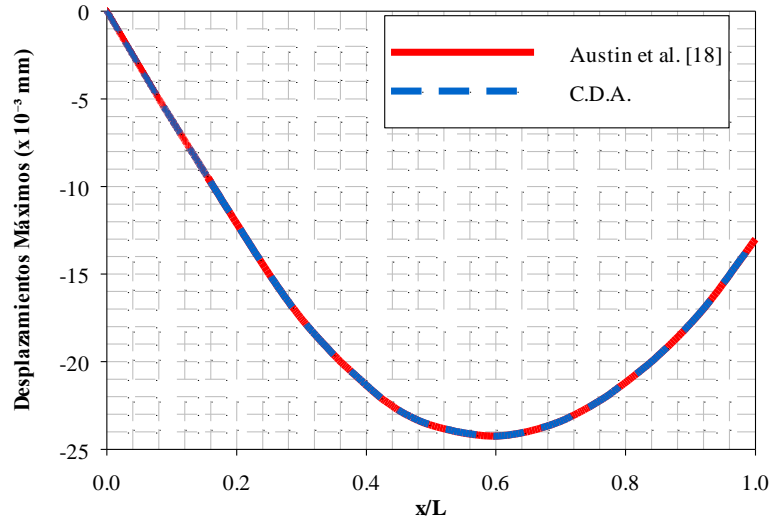
Validamos que los resultados obtenidos a partir de la presente formulación muestran una buena coincidencia con los resultados publicados en Austin et al. (1970), lo que significa que para las repuestas dinámicas a largo plazo (vibraciones) debidas a cargas armónicas pueden predecirse bien definiendo solo la velocidad de las cargas en movimiento.

Esto confirma la precisión del código *MATLAB* desarrollado para el análisis no lineal de la viga, y de la aplicación del método de coeficientes indeterminados, el método de Newmark, y el método de superposición de modos para la resolución de las ecuaciones de movimiento presentadas en las Ecuaciones (45) y (46) en la presente formulación para determinar la respuesta dinámica en las vigas Timoshenko con condiciones de borde distintas, y con vibración forzada debido a una carga armónica aplicada en la masa que se encuentra a lo largo de sus longitudes.

Figura 6

Distribución de deformaciones de la viga empotrada – apoyada a lo largo de su longitud cuando se somete a una carga puntual transversal

$F_0 = 1\text{ N}$ moviéndose a una velocidad $V_f = 27.395\text{ m/s}$ en $t = 0.5T_a$.



Donde T_a es el tiempo requerido por la carga en movimiento para viajar desde un extremo de la viga hasta el otro extremo, se determina utilizando la presente formulación basada en el método del campo de desplazamiento acoplado (CDA) y se valida con los resultados de Austin et al. (1970).

En la Figura 6, se puede observar la distribución de los desplazamientos transversales de la viga en empotrada – apoyada de la Figura 4 cuando esta se somete a una carga armónica de $f(x, t) = 250 \text{ sen}(50t)$ en el centro de la viga $x/L = 0.5$. La deformada nos muestra como debido al apoyo en $x/L = 1.0$, la viga sufre una deformación plástica máxima en $x/L = 0.6$, alejado de la posición de carga armónica y la masa, lo cual tiene coincidencia con la deformada de vigas con estas condiciones de contorno que demuestra el Método de Singularidad para estos ejemplos en el análisis lineal estático de estructuras.

Validamos que los resultados obtenidos a partir de la presente formulación muestran una buena coincidencia con los resultados publicados en Austin et al. (1970), lo que significa que para las repuestas dinámicas a largo plazo (vibraciones) debidas a cargas armónicas pueden predecirse bien definiendo solo la velocidad de las cargas en movimiento.

Tabla 1

Desplazamientos Máximos (mm) Lineales y No Lineales para Viga con Voladizo con Distintas Relaciones de Esbeltez para Distintas Magnitudes de Carga

Ítem	Magnitud de carga armónica (N)				
	200 - 400		600 - 800		1000
	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL
β	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL
10	3.6465	3.6653	3.5596	3.6968	5.3569
	3.7831	3.7942	3.8354	3.9874	6.7541
25	3.9197	3.9231	4.1112	4.2780	8.1513
	14.0563	14.0520	14.3870	14.5686	19.5485
50	24.1929	24.1809	24.6628	24.8592	30.9457
	34.3295	34.3098	34.9386	35.1498	42.3429
75	44.4661	44.4387	45.2144	45.4404	53.7401
	54.6027	54.5676	55.4902	55.7310	65.1373
100	64.7393	64.6965	65.7660	66.0216	76.5345
	74.8759	74.8254	76.0418	76.3122	87.9317
200	105.2857	105.2121	106.8692	107.1840	122.1233
	215.4223	215.3410	217.1450	217.4746	233.5205
300	325.5589	325.4699	327.4208	327.7652	344.9177
	535.6955	535.5988	537.6966	538.0558	556.3149
400	666.1053	665.9855	668.5240	668.9276	690.5065
	706.2419	706.1144	718.7998	739.2182	761.9037

En la tabla 1 se presentan las respuestas de desplazamiento máximo en el centro de luz, tanto en la región lineal como en la no lineal, de la viga con voladizo de longitud $L = 3$ m, $b = 0,16$ m, con distintas relaciones de esbeltez y para distintas magnitudes de las

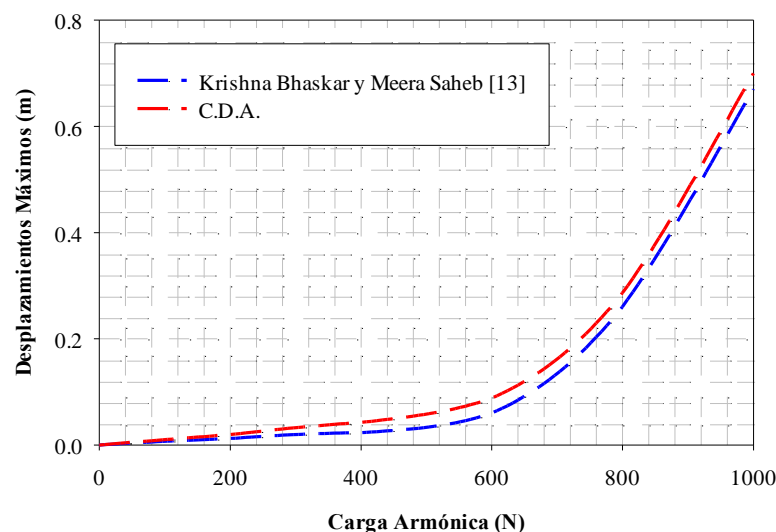
cargas armónicas. La gráfica nos muestra que el desplazamiento lineal máximo es mayor que el desplazamiento no lineal máximo, la viga Timoshenko en la región no lineal se deforma menos que en la región lineal. El análisis de estas respuestas indica que la geometría de la viga cambia considerablemente según su longitud y su sección transversal, por lo tanto, depende de la relación de esbeltez β de la viga. La diferencia de la respuesta dinámica lineal y no lineal es mayor en el caso de las vigas con mayor relación de esbeltez. Se estudia el efecto de las distintas relaciones de esbeltez para distintas magnitudes de carga armónica para comprender el comportamiento preciso de la viga.

Las Figuras 7 y 8 muestran las variaciones de las respuestas lineales y no lineales del desplazamiento máximo en el volado de la viga con la magnitud de la carga armónica de longitud $L = 3$ m, $b = 0,16$ m.

Para la mayor relación de esbeltez considerada, $\beta = 400$, la variación de la respuesta de desplazamiento lineal y no lineal en el volado de la viga con la magnitud de la carga armónica se muestra en la Fig. 7 y 8 respectivamente.

Figura 7

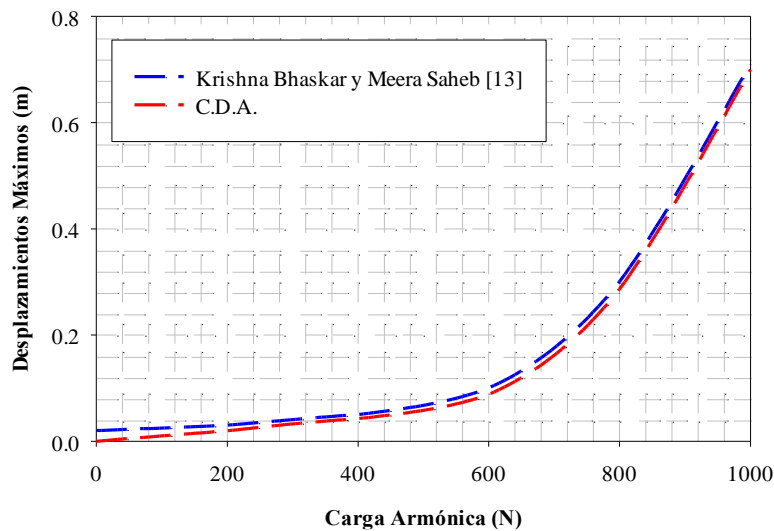
Validación de desplazamientos lineales máximos para la viga con voladizo



La Figura 7 muestra la variación de la respuesta lineal del desplazamiento para la viga con voladizo para la mayor relación de esbeltez considerada. Observamos, que mientras menor sea la relación de esbeltez β , mayor es la rigidez de la viga ya que no consideramos el efecto de la inestabilidad. Caso contrario cuando tenemos una mayor relación de esbeltez β la viga tiene una mayor tendencia a deformarse por cargas o esfuerzos axiales.

Figura 8

Validación de desplazamientos no lineales máximos para la viga con voladizo.



La Figura 8 muestra la variación de la respuesta no lineal del desplazamiento para la viga con voladizo para la mayor relación de esbeltez considerada. Observamos, al igual que el análisis no lineal de la Figura 7, mientras menor sea la relación de esbeltez β , mayor es la rigidez de la viga ya que no consideramos el efecto de la inestabilidad. Caso contrario cuando tenemos una mayor relación de esbeltez β la viga tiene una mayor tendencia a deformarse por cargas o esfuerzos axiales, lo que hace que su desplazamiento aumente de forma exponencial.

Tabla 2

*Desplazamientos Máximos (mm) Lineales y No Lineales para Viga Empotrada – Apoyada
con Distintas Relaciones de Esbeltez para Distintas Magnitudes de Carga*

Ítem	Magnitud de carga armónica (N)				
	200 - 400		600 - 800		1000
β	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL	NO LINEAL	LINEAL
10	9.7621	9.7219	9.8621	9.8892	9.8954
	10.6354	10.6176	10.6478	10.6647	10.7123
25	10.8527	10.9863	10.8711	10.8802	10.8967
	11.1023	11.0591	11.1453	11.1132	11.2645
50	11.3584	11.4635	11.5576	11.5582	11.6013
	11.8400	11.9471	11.9833	11.9571	12.0632
75	12.2060	12.3396	12.3722	12.3357	12.4596
	12.5719	12.7320	12.7610	12.7144	12.8560
100	12.9379	13.1245	13.1499	13.0930	13.2524
	13.3038	13.5170	13.5387	13.4717	13.6488
200	14.4017	14.6944	14.7053	14.6076	14.8380
	14.7676	15.0869	15.0941	14.9863	15.2344
300	15.1336	15.4793	15.4830	15.3649	15.6308
	15.4995	15.8718	15.8718	15.7436	15.0272
400	15.8655	15.2643	15.2607	15.1222	15.4236
	15.2314	15.6567	15.6495	15.5009	15.8200

En la tabla 2 se presentan las respuestas de desplazamiento máximo tanto en la región lineal como en la no lineal, de la viga empotrada – apoyada de longitud $L = 3$ m, $b = 0,16$ m, con distintas relaciones de esbeltez y para distintas magnitudes de las cargas armónicas. Observamos en la tabla que el desplazamiento lineal máximo es mayor que el desplazamiento no lineal máximo con gran diferencia, la viga Timoshenko en la región no lineal se deforma menos que en la región lineal. El análisis de estas respuestas indica que la

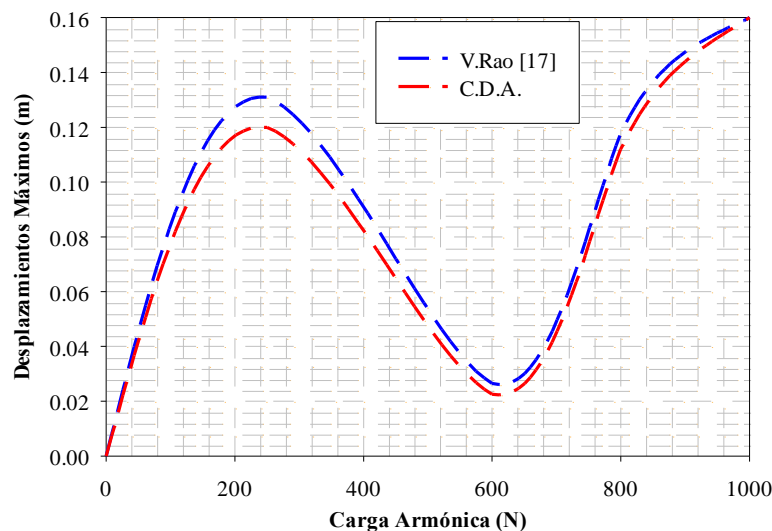
geometría de la viga cambia considerablemente según su longitud y su sección transversal, por lo tanto, depende de la relación de esbeltez β de la viga.

El comportamiento no lineal de la viga empotrada – apoyada se observa en las relaciones de esbeltez más altas en comparación con la viga con voladizo. Esto se debe a que, debido a sus apoyos, que detienen todos los grados de libertad, esta se vuelve más rígida en comparación con la viga con voladizo.

Para la mayor relación de esbeltez considerada, $\beta = 400$, la variación de la respuesta de desplazamiento lineal y no lineal en centro de la viga con la magnitud de la carga armónica se muestra en la Fig. 8 y 9 respectivamente.

Figura 9

Validación de desplazamientos lineales máximos para la viga empotrada – apoyada

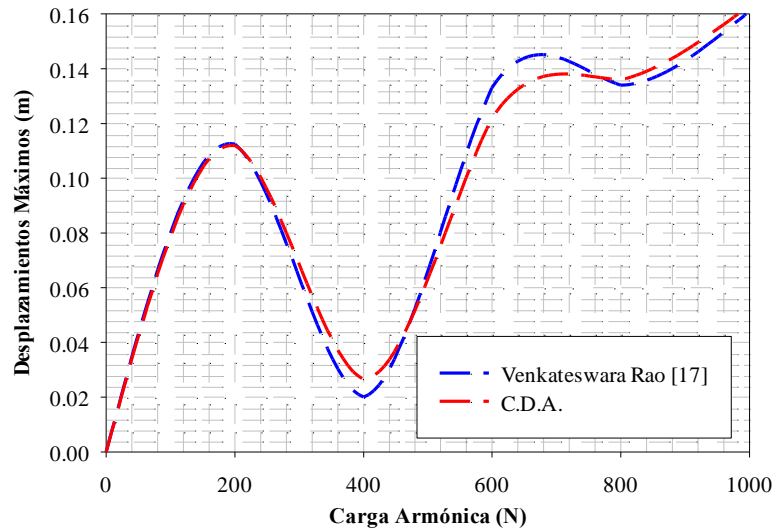


La Figura 9 muestra la comparación de los desplazamientos lineales con la magnitud de carga armónica para $L = 3$ m, $b = 0,16$ m. Observamos que, en el rango de 220 N y 610 N los desplazamientos se reducen, pero luego desde la magnitud 620 N los desplazamientos aumentan de forma muy pronunciada. Esto se debe a la consideración de la relación de esbeltez β en el rango de carga mencionado se reduce debido a las condiciones de contorno

de la viga, se desplaza el punto de la masa hacia abajo, luego, gracias al apoyo en $x = 3$ m los desplazamientos se reducen y finalmente el restante es la deformada de la viga.

Figura 10

Validación de desplazamientos no lineales máximos para la viga empotrada – apoyada.



La Figura 10 muestra la comparación de los desplazamientos lineales con la magnitud de carga armónica para $L = 3$ m, $b = 0,16$ m. Observamos, al igual que el análisis no lineal de la Figura 9, en el rango de 200 N y 400 N los desplazamientos se reducen, pero, desde la magnitud 410 N hasta 800 N la viga sufre una excitación bastante significativa luego de que la carga haya pasado la ubicación de la masa. Esto se debe a la misma ubicación de la carga armónica considerando el material y la inercia de la viga, y como esta interviene en los desplazamientos a partir de una posición x cercana al apoyo en el otro extremo.

En resumen, en el caso de las vigas de alta esbeltez, como se muestran en las Fig. 9 y 10 respectivamente, la respuesta lineal del desplazamiento en el centro de la viga y en el extremo de la otra, es mayor que la del caso no lineal (Fig. 10). La flexibilidad de la viga Timoshenko aumenta a medida que la relación de esbeltez lo hace.

A medida que la viga Timoshenko reduce su espesor o base, genera vibraciones de gran amplitud debido a una mayor flexibilidad, incluso en el caso lineal. Cuando esto pasa, el alargamiento del plano neutro que se forma genera una resistencia a la deformación. Así, en el caso de las vigas esbeltas, se observa que la respuesta de desplazamiento de la vibración forzada lineal es mayor que la respuesta de la vibración no lineal.

CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

DISCUSIONES

En el presente trabajo se amplió el novedoso método de campo de desplazamiento acoplado para estudiar la respuesta de vibración forzada de vigas de Timoshenko con masa concentrada en un punto x para las vigas con distintas condiciones de contorno. El método de campo de desplazamiento acoplado es empleado para el estudio de vibraciones en vigas Timoshenko, ya que nos proporciona las ecuaciones de movimiento necesarias que describen su desplazamiento transversal a partir de una función admisible de rotación asumida desde las condiciones de borde del elemento, que posee un solo coeficiente indeterminado.

Las respuestas dinámicas de la viga de Timoshenko para las condiciones de vibración forzada de contorno presentadas en las Fig. 7 y 9, se determinaron mediante la aplicación del método Newmark, para resolver las ecuaciones de movimiento que se obtienen del principio de conservación de la energía total deducidas en las Ecuaciones 45 y 46, y mediante el uso de la técnica de superposición de modos ampliado en (Prado & López, 2021) para vigas con diferentes condiciones de contorno.

Para ambas condiciones de borde de las vigas estudiadas, se observa que la respuesta de desplazamiento no lineal es mayor a la respuesta de desplazamiento lineal para las vigas cortas (menor relación de esbeltez (β)) como se presentan en las Fig. 7, 8, 9 y 10 y se observa que la respuesta de desplazamiento lineal es mayor que la respuesta de desplazamiento no lineal para las vigas esbeltas. En el caso de la viga empotrada – apoyada, debido a sus condiciones de borde (apoyos), que hacen que la viga sea más resistente a la deformación, la deformación máxima observada es menor en comparación con las condiciones límite de la viga con voladizo como se muestra en la Fig. 10 comparada con la Fig. 8, en el que observamos que la diferencia de desplazamientos no es tan alta, aunque significativa.

Este método tiene menos complejidad que otros métodos de energía, ya que los esfuerzos computacionales se reducen a la mitad en comparación con el método de Rayleigh-Ritz como se expone en (Rao Professor, 2007). Esta formulación también se aplica al estudio de vibraciones libres en vigas Timoshenko con distintas condiciones de borde flexibles a cortantes diferentes.

El método de campo de desplazamiento acoplado se encuentra en proceso de extensión a otros problemas complejos como vigas de sección uniforme FG, vigas cónicas FG, placas, y otros elementos estructurales que cumplan distintas funciones en la construcción modular.

CONCLUSIONES

El estudio presentado en esta investigación se basa principalmente en un procedimiento teórico apoyado en una comprobación de elementos finitos y análisis no lineal mediante el lenguaje de programación MATLAB. Teniendo en cuenta el desempeño del campo de desplazamiento acoplado en el análisis de vigas en construcciones modulares con fuerza axial, cortante y momento; y puede utilizarse para encontrar una variedad de parámetros (frecuencias, modos, desplazamientos, etc.). La inspección cuidadosa de estos resultados arroja las siguientes conclusiones:

La función admisible de rotación total asumida mediante el método de aproximación por elementos finitos basado en coeficientes indeterminados es correcta, debido a que los resultados de desplazamientos obtenidos poseen una variación mínima comparado a la literatura; la cercanía de los resultados se debe a la precisión de la función admisible de rotación planteada en la investigación.

El método de Newmark y la técnica de superposición de modos permitió obtener soluciones estables y convergentes para las ecuaciones de movimiento, ofreciendo una

rápida respuesta computacional para la obtención de los desplazamientos transversales de las vigas propuestas.

La comparación de métodos reveló que el campo de desplazamiento acoplado presenta menor complejidad y esfuerzo computacional en comparación con otros métodos energéticos destacando una mayor precisión en la predicción de respuesta dinámica (vibraciones/desplazamientos), mayor capacidad de análisis (estructuras complejas), y un modelamiento más preciso (función admisible de rotación).

Por lo tanto, los resultados muestran que el concepto de campo de desplazamiento acoplado para el análisis de vibraciones forzadas en vigas Timoshenko con masa concentrada es eficiente, ya que, al poseer tanto resultados coherentes, como aproximación con resultados de la literatura mediante otros métodos energéticos, nos demuestra una mayor capacidad de predicción del comportamiento de estructuras tanto simples (viga con voladizo) como complejas (viga hiperestática empotrada – apoyada), esto también nos demuestra una menor sensibilidad a la variación de los parámetros (geometría, material, condiciones de contorno) como por ejemplo, someter la estructura a un fluido, o a una transferencia de calor.

La investigación aporta significativamente al conocimiento en el análisis de vibraciones forzadas, así como la extensión del método de campo de desplazamiento acoplado al estudio de vigas de construcciones modulares con diferentes condiciones de contorno. Se sugiere explorar aplicaciones específicas en la construcción modular y considerar la adaptación del concepto a otras estructuras como áreas de desarrollo futuro.

RECOMENDACIONES PARA INVESTIGACIONES FUTURAS

Puede considerarse la no linealidad del material en la formulación de las ecuaciones de movimiento para ampliar las configuraciones de las vigas.

Las presentes formulaciones pueden ampliarse para el análisis de vibración libre para vigas con grandes deformaciones.

Las vigas estudiadas en la presente investigación son de sección uniforme, no variable. Los elementos pueden modificarse para incorporar secciones variables.

REFERENCIAS

- Austin, F., & Pan, H. H. (1970). Planar dynamics of free rotating flexible beams with tip masses. *AIAA Journal*, 8(4), 726–733. <https://doi.org/10.2514/3.5748>
- Azrar, L., Benamar, R., & White, R. G. (1999). SEMI-ANALYTICAL APPROACH TO THE NON-LINEAR DYNAMIC RESPONSE PROBLEM OF S–S AND C–C BEAMS AT LARGE VIBRATION AMPLITUDES PART I: GENERAL THEORY AND APPLICATION TO THE SINGLE MODE APPROACH TO FREE AND FORCED VIBRATION ANALYSIS. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2), 183–207. <https://doi.org/10.1006/JSVI.1998.1893>
- Bennett, J. A., & Easley, J. G. (2012). A multiple degree-of-freedom approach to nonlinear beam vibrations. *Https://Doi.Org/10.2514/3.5749*, 8(4), 734–739. <https://doi.org/10.2514/3.5749>
- Cai, M., & Luo, J. (2020). Influence of COVID-19 on Manufacturing Industry and Corresponding Countermeasures from Supply Chain Perspective. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)* 2020 25:4, 25(4), 409–416. <https://doi.org/10.1007/S12204-020-2206-Z>
- Fan, Z. J., Lee, J. H., Kang, K. H., & Kim, K. J., Capuñay, J. P. (1998). THE FORCED VIBRATION OF A BEAM WITH VISCOELASTIC BOUNDARY SUPPORTS. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5), 673–682. <https://doi.org/10.1006/JSVI.1997.1353>
- Hwang, K. E., & Kim, I. (2022). Post-COVID-19 modular building review on problem-seeking framework: function, form, economy, and time. *Journal of Computational Design and Engineering*, 9(4), 1369–1387. <https://doi.org/10.1093/JCDE/QWAC057>

- Kim, K., Ri, K., Yun, C., Kim, C., & Kim, Y. (2021). Analysis of the nonlinear forced vibration and stability of composite beams using the reduced-order model. *AIP Advances*, 11(3), 035220. <https://doi.org/10.1063/5.0039212>
- Korabathina, R., & Koppanati, M. S. (2016). Linear free vibration analysis of tapered Timoshenko beams using coupled displacement field method. *Mathematical Models in Engineering*, 2(1), 27–33. <https://www.extrica.com/article/16634>
- Krishna Bhaskar, K., & Meera Saheb, K. (2016). Large amplitude free vibrations of simply supported moderately thick rectangular plates using coupled displacement field method. *Journal of Vibroengineering*, 18(6), 3451–3458. <https://doi.org/10.21595/jve.2016.16889>
- Kwak, M. K. (1998). New admissible functions for the dynamic analysis of a slewing flexible beam. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5), 581–592. <https://doi.org/10.1006/JSVI.1997.1354>
- Mei, C., & Decha-Umphai, K. (1985). A finite element method for non-linear forced vibrations of beams. *Journal of Sound and Vibration*, 102(3), 369–380. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(85\)80148-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(85)80148-6)
- Newmark, N. M. (1959). A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3), 67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
- Orhan, S. (2007). Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam. *NDT & E International*, 40(6), 443–450. <https://doi.org/10.1016/J.NDTEINT.2007.01.010>

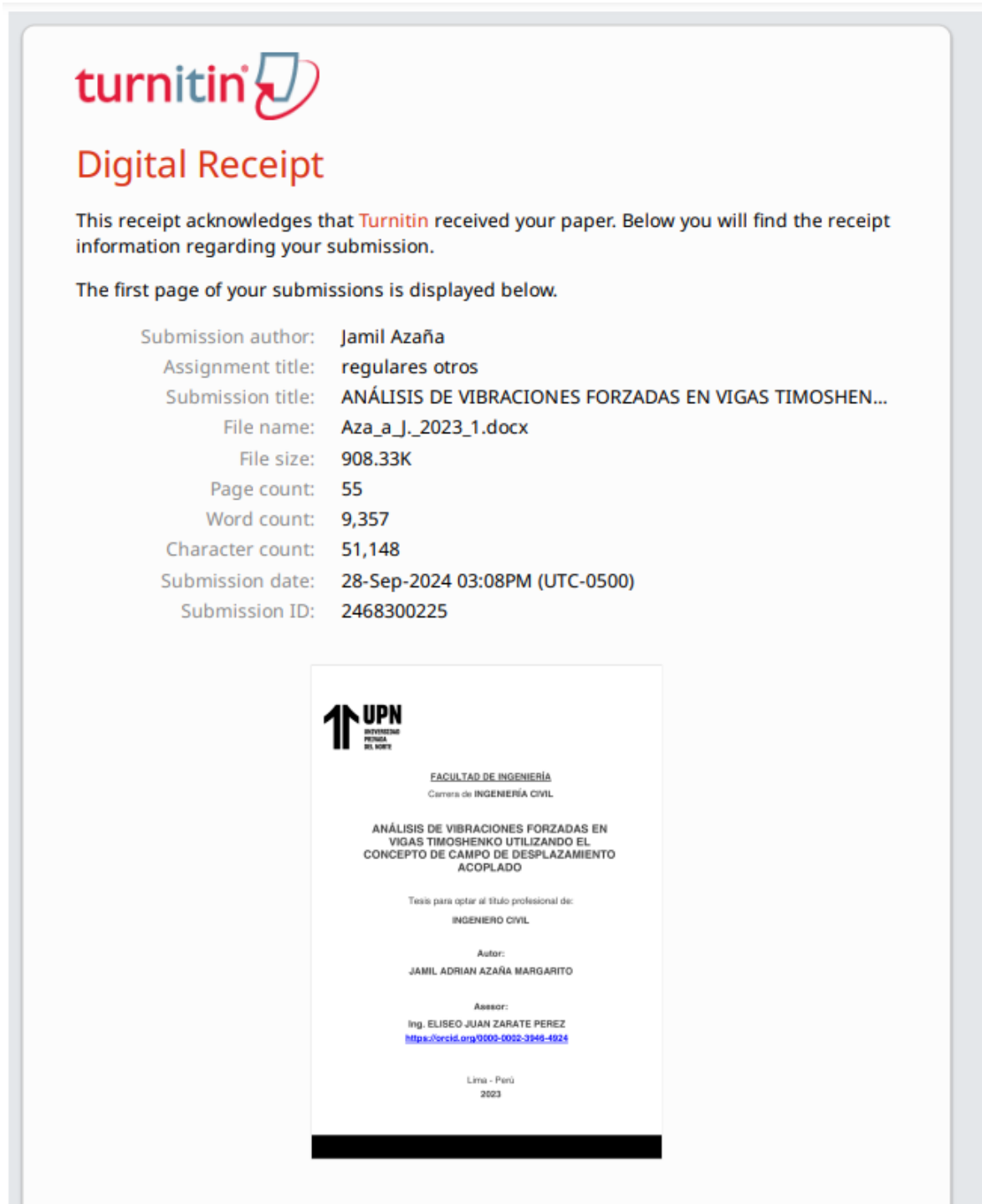
- Pamidimukkala, A., & Kermanshachi, S. (2021). Impact of Covid-19 on field and office workforce in construction industry. *Project Leadership and Society*, 2, 100018. <https://doi.org/10.1016/J.PLAS.2021.100018>
- Prado, M. R. G., & López, R. F. G. (2021). *Modelamiento y simulación de sistemas con Simulink*. <https://ulibros.com/modelamiento-y-simulacion-de-sistemas-con-simulink-5k0nk.html>
- Rao Professor, S. S. (2007). *Vibration of Continuous Systems*. <http://www.wiley.com/go/permissions>.
- Scaletti, H. (2023). *Métodos de Parámetros Indeterminados (Residuos Ponderados)*.
- Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., & Fuentes Pérez, A. (1934). Teoría de la elasticidad. *McGrawHill*. https://books.google.com/books/about/Teor%C3%ADa_de_la_elasticidad.html?hl=es&id=2oKNNQAACAAJ
- Venkateswara Rao, G., Kanaka Raju, K., & Raju, I. S. (1976). Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of beams and orthotropic circular plates. *Computers and Structures*, 6(3), 169–172. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(76\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(76)90025-0)
- Venkateswara Rao, G., Meera Saheb, K., & Ranga Janardhan, G. (2006). Fundamental frequency for large amplitude vibrations of uniform Timoshenko beams with central point concentrated mass using coupled displacement field method. *Journal of Sound and Vibration*, 298(1–2), 221–232. <https://doi.org/10.1016/J.JSV.2006.05.014>

- Wang, R. T., & Chou, T. H. (1998). NON-LINEAR VIBRATION OF TIMOSHENKO BEAM DUE TO A MOVING FORCE AND THE WEIGHT OF BEAM. *Journal of Sound and Vibration*, 218(1), 117–131. <https://doi.org/10.1006/JSVI.1998.1827>
- Woinowsky-Krieger, S. (1950). The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars. *Journal of Applied Mechanics*, 17(1), 35–36. <https://doi.org/10.1115/1.4010053>
- Zargar Ershadi, M., Faraji Oskouie, M., & Ansari, R. (2022). Nonlinear vibration analysis of functionally graded porous circular plates under hygro-thermal loading. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. <https://doi.org/10.1080/15397734.2022.2134147>

ANEXOS

ANEXO 1

Recibo digital de depósito de la evaluación de similitud.




turnitin

Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author: **Jamil Azaña**
Assignment title: **regulares otros**
Submission title: **ANÁLISIS DE VIBRACIONES FORZADAS EN VIGAS TIMOSHEN...**
File name: **Aza_a_J_2023_1.docx**
File size: **908.33K**
Page count: **55**
Word count: **9,357**
Character count: **51,148**
Submission date: **28-Sep-2024 03:08PM (UTC-0500)**
Submission ID: **2468300225**



FACULTAD DE INGENIERÍA
Carrera de INGENIERÍA CIVIL

**ANÁLISIS DE VIBRACIONES FORZADAS EN
VIGAS TIMOSHENKO UTILIZANDO EL
CONCEPTO DE CAMPO DE DESPLAZAMIENTO
ACOPLADO**

Tesis para optar al título profesional de:
INGENIERO CIVIL

Autor:
JAMIL ADRIAN AZAÑA MARGARITO

Aesor:
Ing. ELISEO JUAN ZARATE PEREZ
<https://orcid.org/0009-0002-3046-4924>

Lima - Perú
2023