



UNIVERSIDAD  
PRIVADA  
DEL NORTE

# FACULTAD DE INGENIERÍA

CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

“COMPARACIÓN DE LA RESISTENCIA A LA FLEXIÓN DE UNA COLUMNA CUADRADA  $F'C=210 \text{ KG/CM}^2$  CON REFUERZO DE FIBRAS DE CARBONO Y DE MANERA CONVENCIONAL, UTILIZANDO EL MATHCAD”

Tesis para optar el título profesional de:

**Ingeniera Civil**

**Autora:**

Bach. Joycy Maripily Sánchez Cerna

**Asesor:**

Mg. Omart Demetrio Tello Malpartida

Lima – Perú  
2017

## **APROBACIÓN DE LA TESIS**

El asesor y los miembros del jurado evaluador asignados, **APRUEBAN** la tesis desarrollada por la Bachiller **Joycy Maripily Sánchez Cerna**, denominada:

**“COMPARACIÓN DE LA RESISTENCIA A LA FLEXIÓN DE UNA  
COLUMNA CUADRADA  $F'C= 210 \text{ KG/CM}^2$  CON REFUERZO DE  
FIBRAS DE CARBONO Y DE MANERA CONVENCIONAL,  
UTILIZANDO EL MATHCAD”**

---

Ing. Omart Demetrio Tello Malpartida  
**ASESOR**

---

Ing. Gabriel Cachi Cerna  
**JURADO**  
**PRESIDENTE**

---

Ing. Raúl Pinto Barrantes  
**JURADO**

---

Ing. Fanny Valdivieso Garcia  
**JURADO**

## DEDICATORIA

Durante el desarrollo de esta tesis se presentaron diversidades de situaciones que pudieron ser fácilmente causantes del fracaso de esta, pero esto no sucedió, y fue gracias al apoyo presentado por mi familia, pero en especial a mi novio Jose Julio Flores Baldeón; porque en todo momento estuvo atento a mis necesidades y requerimientos para el desarrollo con excelencia de esta tesis.

*Tu ayuda ha sido fundamental, has estado conmigo incluso en los momentos más turbulentos. Este proyecto no fue fácil, pero estuviste motivándome y ayudándome hasta donde tus alcances lo permitían. Te lo agradezco muchísimo, amor.*

Esto sin duda fue un gran logro para mi vida como estudiante y en gran parte influyó para ser el profesional en el que hoy me convertiré, pero más que enfocarme en mis logros, deseo enfocarme en todos los sacrificios que debió realizar mi familia para poder permitirme desarrollar con tales beneficios toda mi carrera.

Gracias a Dios por permitirme tener una familia que siempre creyó en mí y gracias a mi familia por ser la motivación para cada día llegar más lejos en mi vida y carrera profesional.

## AGRADECIMIENTO

Les agradezco infinitamente a quienes dieron mucho interés en que pudiera cumplir mis sueños y me ayudaron, aunque para eso tuvieron que arriesgarse un poco, esto se lo dedico a mis héroes de edad avanzada, a mis dulces abuelos Ferrer Cerna Soria y Liduvina Tomaida Olga Mejía Gomero que supieron aguantarme y reprendirme cuando era debido.

Además de consentirme siempre, les dedico este logro en su nombre ya que sin ustedes tengo que estar muy consciente de que no lograría nada, les debo mucho a ustedes y no hay forma de pagarles todo lo que han hecho por mí, los amo.

Mis abuelos que siempre estuvieron apoyándome en todo momento, siempre cuidándome de todo mal y a su vez enseñándome buenas costumbres de su época, y no solo eso también la disciplina que aprendí con ellos me ha servido tanto en la sociedad para saber comportarme.

Gracias a ellos es que logro tantas cosas buenas, por eso este gran agradecimiento, espero que estas palabras les llegue a donde quiero ya que están escritas con mucho amor, de verdad les agradezco todos los momentos que estuvieron presentes gracias por cuidarme cuando mis padres no podían y llenarme las tardes de buenas historias y novelas.

En esta vida hay personas muy significativas para mí, tanto así que bien todos me han enseñado grandes cosas, pero ningunos como mis abuelitos que siempre estuvieron con la mejor paciencia del mundo y siempre velando por mi bienestar aun cuando ya era mayor.

No hay personas que, al igual que mis padres ame más que mis abuelos ya que con ellos he aprendido tanto en la vida que simplemente no encuentro manera de decirles que los amo y que todos mis logros serán dedicados a ellos; es por eso que siempre me dieron su apoyo para que siga avanzando.

Hay veces en la vida que eres exitoso porque has ido aprendiendo las cosas a tu modo, pero también hay otras veces en que simplemente hay personas que dejan un buen recuerdo de enseñanza en ella ¿y cómo no?, cuando mis abuelos siendo lo mejor que tengo en este planeta supieron lo que era mejor para mí.

Defendiéndome hasta de mi madre, y por supuesto enseñándome a cómo tratar y hablar, todo lo que es de referencia a una buena costumbre se lo debo a mis abuelos, los amo y hoy en día mi éxito es su éxito.

Si has tenido la dicha de tener héroes en tu vida, así como también personas significativas créeme que me entenderás cuando hable de mis abuelos, ellos me enseñaron todo lo que tenía que aprender y más hasta mi manera de comportamiento se las debo a ellos, y es preciso que ellos sepan que todo este gran logro se lo debo a ellos.

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b><u>APROBACIÓN DEL TRABAJO</u></b> .....	<b>ii</b>
<b><u>DEDICATORIA</u></b> .....	<b>iii</b>
<b><u>AGRADECIMIENTO</u></b> .....	<b>iv</b>
<b><u>ÍNDICE DE CONTENIDOS</u></b> .....	<b>v</b>
<b><u>ÍNDICE DE TABLAS</u></b> .....	<b>vi</b>
<b><u>ÍNDICE DE FIGURAS</u></b> .....	<b>vii</b>
<b><u>RESUMEN</u></b> .....	<b>xi</b>
<b><u>ABSTRACT</u></b> .....	<b>xi</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>10</b>
a. Realidad Problemática .....	10
b. Formulación del problema.....	11
c. Justificación.....	11
d. Limitaciones .....	12
e. Objetivos .....	13
<b>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO</b> .....	<b>14</b>
a. Antecedentes .....	14
b. Bases teóricas.....	17
c. Bases de diseño.....	27
<b>CAPÍTULO 3. HIPÓTESIS</b> .....	<b>37</b>
<b>CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA</b> .....	<b>38</b>
a. Operacionalización de variables .....	38
b. Diseño de investigación .....	38
c. Población .....	38
d. Métodos, instrumentos y procedimientos de análisis de datos .....	39
<b>CAPÍTULO 5. INVESTIGACIÓN</b> .....	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO 6. RESULTADOS</b> .....	<b>64</b>
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>70</b>
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	<b>71</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>72</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>73</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1: Guía para la selección de la fibra utilizando sistemas Sika Carbodur .....</b>	<b>19</b>
<b>Tabla 2: Peso y diámetro de varillas de acero Grado 60.....</b>	<b>21</b>
<b>Tabla 3: Columna con sección cuadrada de 0.30 x 0.30 y resistencia del concreto <math>f'c=210</math> kg/cm<sup>2</sup> SIN REFORZAMIENTO.....</b>	<b>64</b>
<b>Tabla 4: Columna con sección cuadrada de 0.30 x 0.30 y resistencia del concreto <math>f'c=210</math> kg/cm<sup>2</sup> CON REFORZAMIENTO.....</b>	<b>64</b>
<b>Tabla 5: Incremento para una columna de sección 0.30x0.30 con concreto <math>f'c</math> 210 kg/cm<sup>2</sup> .</b>	<b>64</b>
<b>Tabla 6: Porcentajes de incremento de fuerzas en una columna de sección cuadrada (0.30 x 0.30), valor promedio obtenido en la tabla 5 .....</b>	<b>66</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Gráfico 1: Idealización de la curva esfuerzo - deformación para el acero en tensión o compresión.....	22
Gráfico 2: Curva esfuerzo deformación para concreto confinado por estribos rectangulares, Kent y Park.....	39
Gráfico 3: Variación de la distribución de deformaciones en la sección de acuerdo a la ubicación de la carga axial.....	42
Gráfico 4: Sección rectangular analizada con refuerzo simétrico.....	43
Gráfico 5: Tipos de falla de columnas sometidas a flexo-compresión.....	44
Gráfico 6: Diagrama de iteración de una sección rectangular con refuerzo simétrico.....	46
Gráfico 7: Distribución de deformaciones unitarias en una sección.....	47
Gráfico 8: Variación del factor $\phi$ (columnas).....	48
Gráfico 9: Columna de concreto armado sometida a carga P, excéntrica.....	51
Gráfico 10: Diagrama de interacción de columnas cortas y esbeltas.....	51
Gráfico 11: Longitud libre de la columna.....	52
Gráfico 12: Equilibrio de cuerpo rígido en una sección transversal.....	55
Gráfico 13: Curva esfuerzo deformación para concreto confinado por estribos rectangulares, Kent y Park.....	57
Gráfico 14: Diagrama completo de interacción para $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ cuya sección es $0.3 \times 0.3$ , los puntos de la gráfica son los valores de la Tabla 3 y 4.....	65
Gráfico 15: Diagrama de interacción en el eje $x=0$ e $y=0$ para $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ cuya sección es $0.30 \times 0.30$ .....	65
Gráfico 16: Diagrama de interacción para diferentes espesores de reforzamiento mejora las resistencias (Axial y Momento) conforme aumenta el espesor de reforzamiento.....	67
Gráfico 17: Diagrama de interacción con deformación última de FRP obtenida por cálculo (gráfica celeste) y diagrama de interacción con $\epsilon = 0.003$ (gráfica naranja).....	68
Gráfico 18: Curva supuesta esfuerzo - deformación del concreto $f'c = 210$ .....	75
Gráfico 19: Curva supuesta esfuerzo - deformación del acero.....	76
Gráfico 20: Diagrama de interacción carga axial - momento de una sección $0.30 \times 0.30$ de concreto armado $f'c = 210$ SIN FRP.....	88
Gráfico 21: Curva supuesta esfuerzo - deformación del acero.....	89
Gráfico 22: Diagrama de interacción carga axial - momento de una sección $0.30 \times 0.30$ de concreto armado $f'c = 210$ CON FRP.....	103

## RESUMEN

El presente trabajo se realiza para determinar y comparar en forma teórica la capacidad a flexo – compresión de columnas cuadradas de concreto armado sin reforzar y reforzadas mediante la adición del confinamiento externo con mantas de fibra de carbono.

Generar por primera vez un procedimiento general de diseño para una columna cuadrada que sea simple de usar, además de mostrar por la curva de esfuerzo-deformación obtenida de este procedimiento; para esto se construirá la curva de flexo-compresión de las columnas, estas graficas se basarán en la metodología seguida en el libro de Estructuras de Concreto Reforzado de R.Park y T. Paulay y la normativa alemana DAfStb; generara una comparación de las curva de flexo-compresión de la columna de concreto armado versus la curva de flexo-compresión de una columna de concreto armada reforzada externamente con fibra de carbono y en ellas se verificara si genera aumento. Las curvas se construirán para la resistencia de concreto armado de  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ; se usará la sección típica de concreto armado, también se responderán a las dudas si las columnas reforzadas tienen el mismo punto de falla que las columnas sin reforzar o si son iguales las deformaciones ultimas.

Se hace mención que las gráficas de las curvas de flexo-compresión son dos ejemplos (Ver Anexo 02, pág. 75), para la resistencia a la compresión del concreto  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y sección cuadrada de columna de concreto armado, en estas graficas se responderá que nunca una columna reforzada con fibra de carbono y una columna sin refuerzo tienen la misma deformación unitaria ultima y si la sección reforzada tendrá una falla dúctil.

Se procede al análisis de los principales modelos de confinamiento aplicados a una sección de columna circular reforzada para esto se usará la normativa alemana “COMISIÓN ALEMANA PARA CONCRETO ARMADO” (Cuyas siglas son DAfStb-Deutsche Ausschuss für Stahlbeton), la cual se basa en las curvas de Liam y Teng que se van a usar como solo como guía para la construcción de un procedimiento propio para generar las gráficas de flexo-compresión de las secciones de columna cuadradas, creando una propia teoría de refuerzo de columnas cuadradas o rectangulares.

**PALABRAS CLAVE:** Refuerzo con FRP, Estándar DafStb “COMISIÓN ALEMANA PARA CONCRETO ARMADO”.



## ABSTRACT

The present work is carried out to determine and to compare in a theoretical way the capacity to flex – compression of square columns of reinforced concrete without reinforcing and reinforced by the addition of the external confinement with blankets of carbon fiber.

To demonstrate theoretically whether the external reinforcement with carbon fiber generates increase of axial load and flexion; This will be verified with the construction of the flexo – compression curve of the columns, these graphs will be based on the methodology followed in the book of Reinforced Concrete Structures of R.Park and T. Paulay; The flexo – compression curve of the reinforced concrete column versus the flexo – compression curve of an externally reinforced reinforced concrete column with carbon fiber will be constructed and verified if it generates increments. The curves will be constructed for the resistance of reinforced concrete of  $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ; The typical section of reinforced concrete, square section, will be used.

It is mentioned that the graphs of the flexo – compression curve are two examples (See Annex 02) for the compressive strength of concrete  $f'c = 210$  and square section of column of reinforced concrete.

The main confinement models applied to a reinforced column section are analyzed in order to use the German standard "GERMAN COMMISSION FOR ARMED CONCRETE" (DAfStb - Deutsche Ausschuss für Stahlbeton), which is based on the curves Of Liam and Teng which will be used as a guide for the construction of the flexo – compression graphs of the given column sections.

**KEY WORDS:** Reinforcement with FRP, Standard DafStb, Reinforcement of columns.

## CAPITULO 1.INTRODUCCIÓN.

### a) Realidad Problemática.

La terrible tragedia ocurrida en la ciudad de Nepal, Asia del Sur, en el 2015 nuevamente nos recuerda que la ciudad de Lima es vulnerable ante fuertes sismos.

La gran cantidad de víctimas en Nepal fue por las construcciones precarias de adobe, caso semejante con el Perú. No es el suelo, sino el tipo de construcción que existe en el país. El 70% de viviendas en Lima son ilegales, sin planos, malos materiales y construidas sin supervisión profesional y por estas razones requiere de algún tipo de reforzamiento para no colapsar ante un sismo de gran magnitud como el ocurrido en Nepal. (La Republica, 2015)

El terremoto no va a matar a nadie, sólo sacudirá el suelo con mayor intensidad, eso es todo. El problema son las casas mal construidas, en sitios inadecuados, que colapsan y matan a la gente. (Tavera, 2012)

El avance tecnológico en la construcción y los nuevos proyectos sofisticados y modernos de hoy en día sugieren la búsqueda de nuevas tecnologías y diseños, los cuales sean de fácil aplicación e instalación. En Perú se viene utilizando los polímeros dentro de los cuales están las fibras de carbono, en inglés significa Fibrate Reinforcing Polimery (FRP), este tipo de material se viene utilizando en el reforzamiento de columnas en el cual solo se tiene un conocimiento empírico, por esto en la presente tesis se quiere comparar una resistencia de una columna con ese reforzamiento y una convencional.

Para lo mencionado anteriormente, se basará en el código alemán: "DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR STAHLBETON (GERMAN COMMITTEE FOR REINFORCED CONCRETE)" para determinar el diseño de columnas con refuerzo de fibra de carbón (FRP), y el código americano "ACI 4402r-08 GUIDE FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF EXTERNALLY BONDED FRP SYSTEMS FOR STRENGTHENING CONCRETE STRUCTURES" para el diseño de columnas convencionales.

## **b) Formulación del problema.**

¿Al reforzar una columna cuadrada externamente con fibra de carbono, esta mejora la capacidad axial y de momento de una columna?

## **c) Justificación.**

Actualmente en Europa y Estados Unidos se aplica frecuente el reforzamiento estructural con fibra de carbono, pero esto no ocurre en Perú donde se utiliza aún muy poco esta alternativa debido al costo y/o complejidad del diseño. Por lo tanto, se siguen utilizando métodos tradicionales por temor al cambio y al fracaso, debido a que el refuerzo depende de la estabilidad de la estructura.

La fibra de carbono ofrece amplias ventajas con relación a productos competidores aportando numerosas cualidades funcionales, especial su ligereza y resistencia mecánica. Por todas estas razones, es conveniente y oportuno conocer más sobre este material en el reforzamiento de una columna.

Por esta razón, surge la motivación de realizar la presente tesis, la cual proporciona orientación acerca de lo que se puede lograr con este material aplicado como refuerzo en una columna cuadrada.

El sistema de refuerzo con fibra de carbono busca dar a conocer las ventajas, características y propiedades. Asimismo, busca comparar las resistencias por medio del uso de refuerzo con fibra de carbono versus una sin ningún tipo de refuerzo.

Una razón más para la realización de esta investigación es que el Perú cuenta con muchos edificios históricos cuya arquitectónica no debe ser perturbada; con el uso de este tipo refuerzo se lograría rescatar cualquier elemento tipo columna sin modificar su forma, geometría o apariencia visual.

#### **d) Limitaciones.**

Luego de ver las características de la fibra de carbono para poder mejorar una estructura, buscando información se puede rescatar que no existe en la norma peruana un código para el reforzamiento de columnas o de algún otro elemento de concreto armado con fibra de carbono, esto es debido a que en el Perú es un en la ciudad de Lima solo hay un distribuidor de la fibra de carbono de SIKA.

Al no existir una normativa peruana se optó por escoger la metodología presentada la metodología presentara por el código americano ACI440 o la metodología presentada por el código alemán DASftb, se optó por escoger el código alemán de diseño porque este contempla el aporte del estribo de acero de la columna en la resistencia final del elemento reforzado.

La siguiente duda salió en como poder comparar los resultados obtenidos de la sección reforzada con fibra y la sección sin fibra, si en el cálculo obtenido la deformación ultima de la columna reforzada con fibra era mayor a la deformación 0.003, deformación en la rotura del concreto, y para la construcción de las gráficas de interacción de columnas la metodología ACI propone que estas se realicen para la deformación unitaria de 0.003, entonces para poder solucionar este inconveniente se optó por comparar todas las gráficas obtenidas en este punto preciso cuando la deformación es 0.003 y poder comparar las resistencias obtenidas, sabiendo que las secciones reforzadas con fibra puede presentar una mayor deformación unitaria.

Resuelta esta limitación el trabajo consistió en construir las gráficas para la resistencia a compresión del concreto  $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$ , la sección se evaluará con el refuerzo de fibra de carbono y sin el refuerzo de fibra de carbono.

## e) Objetivos.

### Objetivo general

Comparar la resistencia a flexión de una columna cuadrada con refuerzo de fibras de carbono y una sin refuerzo de fibra de carbono, planteando un procedimiento de diseño con el programa MATHCAD, basándose en el libro “ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO” (Park & Paulay, 1988) y código alemán DAfStb.

### Objetivos específicos

- Generar por primera vez la curva de esfuerzo-deformación de una columna cuadrada de concreto armado siguiendo las especificaciones que dicta la norma peruana y basándose en el libro “ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO” (Park & Paulay, 1988).
- Diseñar una columna de sección cuadrada reforzada externamente con mantas y calcular por primera vez su deformación última y comparar la deformación última de columna sin refuerzo.
- Responder a la interrogante que los espesores de refuerzo hacen que la columna tenga una falla frágil y plantear cual sería la deformación unitaria a elegir en los posteriores diseños.
- No existe un procedimiento simple de diseño de columnas reforzadas con fibra de carbono actualmente, se generará un diseño que pueda ser adoptado por futuros diseñadores generando un base para sus cálculos.

## CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO.

### a) Antecedentes

El primer trabajo experimental donde se utilizó la Fibra de Carbono, en inglés Fiber Reinforced Polymer (FRP) para el refuerzo de estructuras de Concreto Armado se remonta al año 1978 en Alemania (Wolf y Miessler 1989). Sin embargo, las primeras aplicaciones se realizaron en Suiza, tras unos trabajos dirigidos a la mejora de la resistencia a flexión de las estructuras de algunos puentes de Concreto Armado (Meier 1987; Rostasy 1987).

Las primeras aplicaciones de la técnica de confinamiento por FRP, a columnas de Concreto Armado, se realizaron en Japón en los años ochenta (Fardis y Khalili 1981; el Katsumata et al. 1987). Sin embargo, el uso de FRPs en este país aumentó de forma súbita en 1995 tras el terremoto de Hyogoken Nanbu (Nanni 1995).

Los Estados Unidos han mantenido, desde los años treinta, un interés constante y continuo en el refuerzo con fibra de carbono de las de estructuras de concreto armado. Sin embargo, el desarrollo en el uso de estos refuerzos tuvo lugar en los años ochenta, tras las iniciativas de la National Science Foundation (NSF) y de la Federal Highway Administration (FHWA).

Las aportaciones más significativas en cuanto a investigación y aplicación del refuerzo mediante fibra de carbono en la rehabilitación de estructuras de concreto armado ocurren a final de los noventa y principios de este siglo (Japan Concrete Institute 1997; Neale 2000; Dolan et al. 1999; Sheheta et al. 1999; Saadatmanesh and Ehsani 1998; Benmokrane and Rahman 1998; Neale and Labossière 1997; Hassan and Rizkalla 2002).

En los últimos diez años, ha tenido lugar el desarrollo de códigos y normas para el refuerzo mediante FRP en Europa, Japón, Canadá, y los Estados Unidos. La Japan Society of Civil Engineers (JSCE), la Japan Concrete Institute (JCI) y la Railway Technical Research Institute (RTRI) han publicado varios documentos relacionados al uso de materiales de fibra de carbono en estructuras de hormigón. En Europa, la International Federation for Structural Concrete (FIB) publicó, en 2001, un boletín con una guía de diseño por refuerzos de estructuras de Concreto Armado por FRP (FIB 2001).

La Canada Standards Association e ISIS han sido instituciones muy activas en el desarrollo de guías de diseño por refuerzos de estructuras de CA por FRP. La sección 16, “Fiber Reinforced Concrete”, del Canadian Highway Bridge Design Code se completó en el 2000 (CSA S806-02) y la Canadian Standards Association (CSA) aprobó, en el 2002, el código “Design and Construction of Building Components with Fiber Reinforced Polymers” (CSA S806-02). En los Estados Unidos, el criterio por evaluar los sistemas de fibra de carbono está empezando a estar disponible en la industria de la construcción (AC125 1997; CALTRANS 1996; el Hawkins et al. 1998).

Debido a una creciente sensibilidad por la seguridad estructural, muchas investigaciones se han dirigido a desarrollar técnicas de rehabilitación o refuerzo de estructuras existentes de concreto armado (Concreto Armado).

Las primeras investigaciones realizadas en refuerzos de soportes de estructuras de Concreto Armado son norteamericanas, motivadas por la necesidad de remediar las primeras patologías que empezaron a manifestarse en los primeros puentes de estructuras de Concreto Armado, y por la necesidad de reforzarlos frente al aumento progresivo de carga que tuvo lugar a lo largo de los 90. Otra motivación adicional en el refuerzo de estructuras fue el descubrimiento de la vulnerabilidad de muchas estructuras construidas de estructuras de Concreto Armado frente a sucesos sísmicos.

Los primeros trabajos se dirigieron al refuerzo mediante el crecimiento de estructuras de Concreto Armado para pasar posteriormente los esfuerzos hacia los encamisados de acero y mediante FRP. Una de las ventajas que permitió el rápido desarrollo del refuerzo por FRP fue la facilidad y la efectividad de esta técnica en el refuerzo de soportes circulares, captando la atención de numerosos investigadores que en ésta última década han publicado números modelos de análisis y de diseño.

Dentro de las investigaciones internacionales más destacadas tenemos “USO DE FIBRAS DE CARBONO COMO REFORZAMIENTO A FLEXION EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO”, elaborado por Andres Arturo Beltran Rivero, que servirá solo de referencia para la presente investigación; cabe indicar que no plantear un procedimiento de diseño; de la investigación, basado en los ensayos se rescató lo siguiente.

“Menciona que existe un notable incremento de la carga última de falla y resistencia a flexión en vigas, por lo que se verificara si cumple dicha característica en columnas; adicionalmente se da a conocer que el incremento de la resistencia a flexión fue notable en la viga con reforzamiento preventivo ya que se presentó un incrementó, también se verificara en columnas de concreto armado. (Beltran Rivero, 2011)”.

Adicional a la investigación antes mencionada, se encuentra la tesis “REFORZAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO CON FRP (FIBER REINFORCED POLYMERS), APLICACIÓN AL CASO DE REFUERZO DE UNA LOSA Y COLUMNAS DE UN SALÓN DE AUDIOVISUALS Y UN AUDITORIO”, elaborado por Luis Fernando Rosero Landeta, hace mención que la fibra de carbono representa el material más apto para el refuerzo pasivo de estructuras de concreto armado basándose en la inalterabilidad de las características mecánicas de las fibras ante factores externos.

Se especifica que el tipo de fibra y espesor óptimo dependen del propósito de la aplicación y nivel de refuerzo requerido. Por lo general se concluye que, a menor rigidez del material compuesto, se necesita mayor espesor del refuerzo, es decir que el espesor es inversamente proporcional a la rigidez del material compuesto. Se deberá considerar por igual el deseo de mantener o incrementar la carga de servicio o la carga última, así como la deformación y la ductilidad. (Rosero Landeta, 2013)

En el Perú se rescatan dos tesis sobre elementos estructurales tipo vigas reforzados con fibra de carbono; entre las cuales tenemos: “ESTUDIO EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DEL COMPORTAMIENTO DE FLEXIÓN DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORZADAS CON BANDAS DE FRP”, elaborado por el ingeniero Jorge Luis Bazán Serrano, a pesar de que dicho estudio está enfocado para elementos estructurales tipo viga se usará como referencia para la presente investigación en columnas de concreto armado; de dónde se probará de manera teórica las siguientes dos teorías aplicadas en columnas.

La inclusión de un sistema de refuerzo exterior de fibra de carbono en una columna de concreto armado origina una modificación en el comportamiento de la sección, específicamente las siguientes tres características: incremento de resistencia a la flexión, reducción de la curvatura última y modificación del modo de falla.

El comportamiento final obtenido al reforzar una columna de concreto armado dependerá principalmente de la cuantía de acero del refuerzo existente, la cuantía de refuerzo externo FRP colocado, la rigidez axial del sistema FRP a aplicarse, así como la calidad del concreto de la sección. (Bazán Serrano, 2015)

También dentro del mismo rubro de la investigación se rescata la tesis: “COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORZADAS EXTERNAMENTE CON PLATINAS DE FIBRAS DE CARBONO”, elaborado por el Ingeniero Luis Ricardo Proaño Tataje, a pesar que está enfocada al igual que la anterior para elementos estructurales tipo viga y se realiza con platinas de FRP; solo se usará como referencia para la presente investigación en columnas de concreto armado reforzadas con mantas de FRP.



El uso de la fibra de carbono FRP para el reforzamiento o rehabilitación de estructuras de concreto armado ha ganado una aceptación generalizada, gracias a las investigaciones que se vienen realizando en esta materia en los últimos años alrededor del mundo; sin embargo se estudiara si ocurre un aumento significativo de la resistencia que puede ser alcanzada por la aplicación por adherencia de estos materiales. (Proaño Tataje, 2011)

## b) Bases teóricas

### Fibra de Carbono para Reforzamiento Estructural

La fibra de carbono es una fibra sintética constituida por finos filamentos de 5–10 micras ( $\mu\text{m}$ ) de diámetro, compuesto principalmente por carbono. Cada fibra de carbono es la unión de miles de filamentos de carbono. Tiene propiedades mecánicas similares al acero y es tan ligera como la madera o el plástico. Por su dureza tiene mayor resistencia al impacto que el acero.

La principal aplicación es la fabricación de materiales compuestos, en la mayoría de los casos —aproximadamente un 75%— con polímeros termoestables. El polímero es habitualmente resina epoxi, de tipo termoestable, aunque también puede asociarse a otros polímeros, como el poliéster o el viniléster. (Cavette, 2012)

Las propiedades principales de este material son:

- Muy elevada resistencia mecánica, con un módulo de elasticidad elevado.
- Baja densidad, en comparación con otros materiales como por ejemplo el acero.
- Elevado precio de producción.
- Resistencia a agentes externos.
- Gran capacidad de aislamiento térmico.
- Resistencia a las variaciones de temperatura, conservando su forma, sólo si se utiliza matriz termoestable.

Los principios para la adhesión externa de platinas o tejidos CFRP a las estructuras de concreto son muy similares a los principios utilizados en la aplicación de platinas de acero adheridas. En general, la resistencia a flexión, a fuerza del elemento es incrementada por las aplicaciones externas del material que trabaja a la tensión. El reforzamiento externo con CFRP es adecuado para varias aplicaciones estructurales, entre ellas:

- Aumento de capacidad debido a algún cambio en el uso.
- Confinamiento pasivo para aumentar la resistencia sísmica.
- Control y reparación de fisuras.
- Reforzamiento alrededor de las nuevas aberturas en las placas.

El uso de CFRP para el reforzamiento estructural tiene un corto historial y son necesarias pruebas de laboratorio adicionales, así como soporte con datos analíticos, para ampliar su uso. En consecuencia, el uso de CFRP en reforzamiento estructural y aplicaciones de rehabilitación debe ser llevado a cabo con precaución y con el juicio de un ingeniero competente. CFRP no debe ser usado en las siguientes situaciones:

- La condición del substrato es desconocida o está muy deteriorado.
- Existe una corrosión sustancial en curso en el acero de refuerzo interno.
- No existe acero de refuerzo suave para proporcionar comportamiento dúctil.

Los materiales FRP registran propiedades mecánicas reducidas después de la exposición a ciertos factores ambientales incluyendo temperatura, humedad y exposición química. La exposición ambiental, duración de la exposición, tipo de resina y formulación, tipo de fibra, y método de curado de la resina son algunos de los factores que influyen el monto de la reducción en las propiedades mecánicas. Las propiedades a tensión reportadas por los fabricantes están basadas en ensayos realizados en condiciones de laboratorio y no reflejan los efectos de exposición ambiental. Estas propiedades deben ser ajustadas para tener en cuenta el ambiente de servicio al cual el sistema FRP puede ser expuesto durante su vida de servicio.

### Propiedades y guías de selección del tipo de fibra Sika Carbodur

Sistema de reforzamiento de alto desempeño para concreto armado. Sistema de dos componentes: Adhesivo Sikadur-30 para la unión del reforzamiento y platina Sika Carbodur.

Platinas Sika Carbodur	
Base:	Fibras de carbono en matriz epóxica
Color:	Negro
Contenido de fibras en volumen:	> 68%
Resistencia a temperatura:	> 150°C

### Guías de selección del Tipo de Fibra

Las fibras solas presentan buenas características de durabilidad a largo plazo, pero son todavía afectadas directa o indirectamente por la humedad; los ciclos de temperatura, exposición a químicos y exposición UV.

El refuerzo a flexión está controlado por el módulo de rigidez del material, ya que el refuerzo en general se da en grandes luces con la necesidad de limitar las deformaciones. Por esta razón para el refuerzo a flexión se recomienda el uso de fibras de carbono por su alto módulo de rigidez comparado con otros tipos de fibras y su bajo peso.

El cuadro que se presenta a continuación proporciona algunas guías básicas para la selección de la fibra de acuerdo con el uso y la exposición ambiental.

Las recomendaciones también se basan en consideraciones económicas una vez la idoneidad de la fibra es tomada en consideración. El carbono puede siempre ser sustituido por vidrio; lo contrario no es cierto.

**Tabla 1: Guía para la selección de la fibra utilizando sistemas Sika Carbodur**

CONDICION		Fibra de Carbono	Fibra de Vidrio
Carga pasiva	Tejidos adicionales como soporte estructural auxiliar		X
Carga activa	Estructura primaria, esfuerzo menor al 25% (Ultimate tension strength - resistencia ultima a la tension)		X
Carga activa	Estructura primaria, entre el 25% y el 80% UTS	X	
Bajo agua	Completamente sumergido o mojado constantemente	X	
Bajo agua	Zona de salpicaduras	X	
Aplicaciones regidas por resistencia			X
Aplicaciones regidas por rigidez		X	
Bajo tierra	Condiciones de humedad ciclica; seco y mojado		X
Conductibilidad electrica / problema con celdas galvanicas			X
Concreto joven - aplicacio interna o externa		X	
Condiciones alcalinas extremas; pH 9.5 - 13.5		X	
Condiciones acidas extremas; pH 2.0 a 7.0			X
Bajos esfuerzos, alto ciclo de fatiga			X
Altos esfuerzos, alto ciclo de fatiga		X	
Altos esfuerzos de compresion		X	

(Aire Untiveros, 2002)

Cabe señalar que en el cuadro anterior se muestra una comparación entre fibras de vidrio y de carbono; la fibra de vidrio no será abordada en esta tesis.

### **Resina Epoxi (matriz):**

Las resinas epoxi son consideradas como el mejor material matriz para el uso con Sika Wrap, debido a su resistencia superior, propiedades adhesivas, resistencia a la fatiga, resistencia química y baja retracción. El factor determinante en la durabilidad CFRP a largo plazo es la habilidad de la resina para mantener las propiedades del material a lo largo de la vida de servicio de la rehabilitación.

### **Imprimante y/o adhesivo:**

El imprimante es usado como adhesivo para unir los compuestos del Sika Wrap al elemento estructural y para sellar el substrato previniendo la pérdida del epoxi desde el tejido saturado. Es frecuente un epoxi básico como se describe arriba, mostrando las mismas buenas características de durabilidad como el epoxi matriz. La calidad del imprimante y/o adhesivos es crítica porque es responsable de la transferencia de varios esfuerzos entre los compuestos Sika Carbodur y el concreto.

### **Concreto armado**

El concreto es un material compuesto muy empleado en construcción, formado esencialmente por un aglomerante al que se añaden partículas o fragmentos de un agregado (arena y piedra), agua y aditivos específicos.

El aglomerante es en la mayoría de las ocasiones cemento (generalmente cemento Portland) mezclado con una proporción adecuada de agua para que se produzca una reacción de hidratación. Las partículas de agregados, dependiendo fundamentalmente de su diámetro medio, son los áridos (que se clasifican en grava y arena). La sola mezcla de cemento con arena y agua (sin la participación de un agregado) se denomina mortero. Existe concreto que se producen con otros conglomerantes que no son cemento, como el concreto asfáltico que utiliza betún para realizar la mezcla.

### **Cemento**

El cemento es un material pulverulento que por sí mismo no es aglomerante, y que, mezclado con agua, al hidratarse se convierte en una pasta moldeable con propiedades adherentes, que en pocas horas fragua y se endurece tornándose en un material de consistencia pétreo.

El cemento consiste esencialmente en silicato cálcico hidratado (S-C-H) Este compuesto es el principal responsable de sus características adhesivas. Se denomina cemento hidráulico cuando el cemento, resultante de su hidratación, es estable en condiciones de entorno acuosas. Para poder modificar algunas de sus características o comportamiento, se añaden aditivos (en cantidades inferiores al 1% de la masa total del concreto), existiendo una gran variedad de ellos: colorantes, aceleradores, retardadores de fraguado, fluidificantes, impermeabilizantes, fibras, etc.

### Esfuerzos de Compresión uniaxial en el concreto

La resistencia a compresión del concreto se obtiene del ensayo de probetas de 12" de altura por 6" de diámetro. Las probetas se cargan longitudinalmente a una tasa lenta de deformación para alcanzar la deformación máxima en 2 o 3 minutos. La curva esfuerzo-deformación se obtiene de este ensayo, en el cual se relaciona la fuerza de compresión por unidad de área versus el acortamiento por unidad de longitud.

### Acero de refuerzo

El acero de refuerzo en el concreto armado está conformado por varillas de sección redonda, las cuales tienen corrugaciones cuyo fin es restringir el movimiento longitudinal de la varilla relativa al concreto que las rodea. A continuación, se da una tabla con varillas de producción común en nuestro medio.

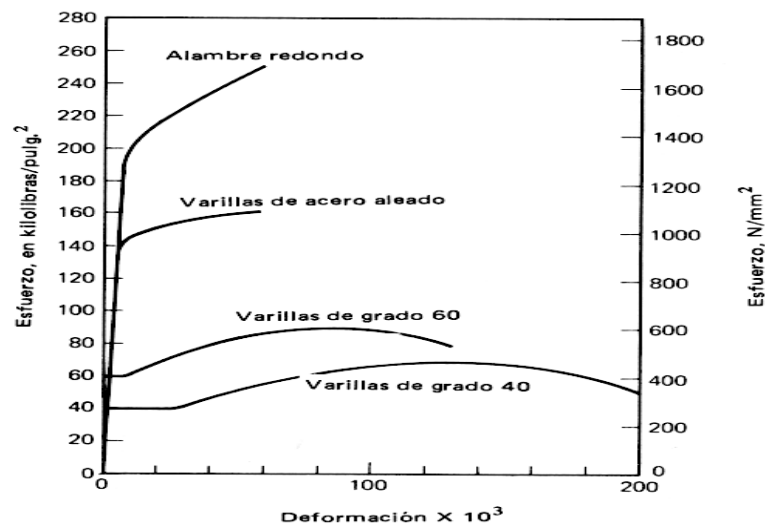
**Tabla 2: Peso y diámetro de varillas de acero Grado 60**

Barra núm.	Diámetro		Peso kg/m	Área cm <sup>2</sup>	Perímetro cm
	pulg.	cm			
3	3/8	0.95	0.559	0.71	2.99
4	1/2	1.27	0.993	1.27	3.99
5	5/8	1.59	1.552	1.98	4.99
6	3/4	1.91	2.235	2.85	5.98
7	7/8	2.22	3.042	3.88	6.98
8	1	2.54	3.973	5.07	7.98
9	1 1/8	2.86	5.028	6.41	8.98
10	1 1/4	3.18	6.207	7.92	9.97
11	1 3/8	3.49	7.511	9.58	10.97
12	1 1/2	3.81	8.938	11.40	11.97

(Instituto de la Construcción y Gerencia, 2014)

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia. Entre estos tipos tenemos los de grado 40, 50, 60, que corresponden a los límites de fluencia de 2800, 3500 y 4200 kg/cm<sup>2</sup>, respectivamente. El usado en el presente documento es el acero de límite de fluencia 4200 kg/cm<sup>2</sup>.

Las curvas esfuerzo-deformación del acero (mostrado en la gráfica 2), en ellas se muestran una porción inicial elástica lineal, una plataforma de fluencia (es decir donde la deformación continua sin aumento del esfuerzo (esfuerzo de fluencia)), una región de endurecimiento por deformación, y finalmente una zona donde el esfuerzo decae hasta ocurrir la fractura.



(Konrad, Niedermeier, & Finckh, 2014) (Park & Paulay, 1988)

**Gráfico 1: Idealización de la curva esfuerzo - deformación para el acero en tensión o compresión.**

### a) Módulo de elasticidad del acero y módulo de elasticidad del concreto

El módulo de elasticidad del acero está dado por la pendiente de la porción elástica lineal de la curva esfuerzo – deformación. El valor del módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco y generalmente se toma igual  $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

Para el concreto el módulo de elasticidad del concreto está dado por la pendiente de la porción elástica lineal de la curva esfuerzo – deformación. El valor del módulo de elasticidad de los distintos tipos de concreto se obtiene por el valor  $E_c = 15000 \times \sqrt{f'c}$  (Morales, 2006), donde  $f'c$  es el valor de la resistencia a compresión, valor obtenido de la rotura de una probeta de concreto en laboratorio.

### b) Confinamiento del concreto por el refuerzo

En la práctica, se confina al concreto mediante refuerzo transversal por estribos (zunchos y/o aros rectangulares de acero). El concreto queda confinado cuando a esfuerzos que se aproximan a la resistencia uniaxial  $f'c$ , las deformaciones transversales se hacen muy elevadas debido al agrietamiento interno progresivo y el concreto se apoya contra el refuerzo transversal, el que entonces aplica una reacción de confinamiento al concreto. El refuerzo transversal proporciona confinamiento pasivo. Las pruebas realizadas por investigadores han demostrado que el confinamiento por el refuerzo transversal puede mejorar considerablemente las características esfuerzo-deformación del concreto a deformación del concreto a deformaciones elevadas; además se ha demostrado que los zunchos confinan al concreto con mayor eficiencia que los estribos.

El concreto no está confinado fuera del área del refuerzo transversal, y se puede esperar que este concreto de recubrimiento tenga características esfuerzo-deformación distintas a las del concreto dentro del núcleo. El recubrimiento generalmente comienza a desprenderse cuando se alcanza la resistencia no confinada, especialmente si la cuantía del acero transversal es elevada debido a la presencia de un gran número de varillas transversales, lo que crea un plano de debilidad entre el núcleo y el recubrimiento, facilitando el desprendimiento.

### Columna

Una columna es un elemento largo de forma vertical sujeto a una fuerza de compresión axial, se utilizan como soporte para estructuras como edificios, puentes, etc. Siempre que se diseña una columna, es necesario que se satisfagan requisitos específicos de resistencia, deflexión y estabilidad. En algunas columnas, si son muy largas o esbeltas la carga puede ser suficientemente grande como para provocar deflexión lateral (llamada pandeo). El pandeo de una columna puede conducir a la falla de una estructura o mecanismo y, por tanto, debe presentarse especial atención al diseño de columnas, de modo que sean capaces de soportar cargas sin pandearse.

La carga máxima que una columna puede soportar cuando está a punto de pandearse se llama carga crítica, cualquier carga adicional provocara que la columna se pandee y, por consiguiente, se deflexione lateralmente. (Hibbeler, 2010)

Una columna ideal es un elemento homogéneo, de sección recta constante, inicialmente perpendicular al eje, y sometido a compresión. Sin embargo, las columnas suelen tener siempre pequeñas imperfecciones de material y de fabricación, así como una inevitable excentricidad accidental en la aplicación de la carga. La curvatura inicial de la columna, junto con la posición de la carga, dan lugar a una excentricidad indeterminada, con respecto al centro de gravedad, en una sección cualquiera. El estado de carga en esta sección es similar al de un poste corto cargado excéntricamente, y el esfuerzo resultante está producido por la superposición del esfuerzo directo de compresión y el esfuerzo de flexión o, mejor dicho, por flexión.

Si la excentricidad es pequeña u el elemento es corto, la flexión lateral es despreciable, y el esfuerzo de flexión es insignificante comparado con el esfuerzo de compresión directo. Sin embargo, en un elemento largo, que es mucho más flexible ya que las flexiones son proporcionales al cubo de la longitud, con un valor relativamente pequeño de la carga  $P$  puede producirse un esfuerzo de flexión grande, acompañado de un esfuerzo directo de compresión despreciable. Así, pues, en las dos situaciones extremas, una columna corta soporta fundamentalmente el esfuerzo directo de compresión, y una columna larga está sometida principalmente al esfuerzo de flexión. Cuando aumenta la longitud de una columna disminuye la importancia y efectos del esfuerzo directo de compresión y aumenta correlativamente las del esfuerzo de flexión.

Por desgracia, en la zona intermedia no es posible determinar exactamente la forma en que varían estos dos tipos de esfuerzos, o la proporción con la que cada una contribuye al esfuerzo total. Es esta indeterminación la que da lugar a la gran variedad de fórmulas para las columnas intermedias. (Nash)

Para dimensionar correctamente una columna son necesarias las siguientes especificaciones:

- a) Las columnas deben dimensionarse conforme a todos los momentos flectores relacionados con una condición de carga.
- b) En el caso de columnas situadas en esquina y de otras cargadas en forma desigual en lados opuestos de direcciones perpendiculares, deben tomarse en consideración los momentos flectores biaxiales.
- c) Es necesario dimensionar todas las columnas para por lo menos una excentricidad  $0.6 + 0.03h$  donde  $h$  es el peralte del elemento y para cargas axiales máximas no superiores a  $0.80 P_0$  cuando las columnas con estribos o de  $0.85P_0$  cuando llevan refuerzo en espiral o helicoidal.



- d) La cuantía mínima de refuerzo longitudinal (respecto al área transversal total de la columna,  $A_g$ ) es 0.01. La cuantía máxima es de 0.06. Sin embargo, en el caso de columnas cuya área seccional sea mayor que la exigida por las cargas puede usarse un valor más pequeño para  $A_g$ , aunque nunca inferior a la mitad del área bruta de dichas columnas, para calcular la capacidad de carga y el área mínima de varillas longitudinales. Esta excepción permite reutilizar encofrados para columnas más grandes de lo necesario y permite que el área de las varillas longitudinales sean apenas 0.005 veces el área real de la columna. Deberán utilizarse por lo menos cuatro varillas longitudinales en los arreglos rectangulares del refuerzo y seis en los circulares.

Las máximas deformaciones se presentan cuando empieza a agrietarse el recubrimiento por fuera de los estribos, después la capacidad resistente del núcleo se reduce.

### **Carga axial**

Una fuerza axial es una fuerza que actúa directamente sobre el centro axial de un objeto en la dirección del eje longitudinal. Estas fuerzas pueden ser de compresión o de tensión, dependiendo de la dirección de la fuerza. Cuando una fuerza axial actúa a lo largo del eje longitudinal y este eje pasa por el centro geométrico del objeto, será además una fuerza concéntrica; en caso contrario será una fuerza excéntrica. Las fuerzas perpendiculares al eje longitudinal del objeto se denominan normalmente como fuerzas verticales.

Una de las partes importantes al analizar una fuerza axial es el concepto de centro geométrico y de centro axial. El centro geométrico es un punto dentro del espacio delimitado por la forma del objeto y que es el centro perfecto de su masa, en otras palabras, desde este punto encontraremos la misma cantidad de masa del objeto en cualquier dirección. En un objeto simple y simétrico, como un cilindro, es fácil encontrar exactamente el centro geométrico realizando unas simples medidas de sus lados.

El eje axial de un objeto va de un lado a otro del objeto pasando por el llamado centro axial. Esta línea depende de la forma del objeto y no de su masa. Por tanto, el centro axial y el centro geométrico pueden coincidir en el mismo punto o puede que no. Cuando una fuerza actúa directamente sobre el centro axial, coincida o no con el centro geométrico, es una fuerza axial. Una fuerza axial actúa comprimiendo o tensionando (estirando) el eje axial en dos direcciones opuestas. Una fuerza axial, por tanto, no hace moverse al objeto. Un ejemplo típico de fuerza axial se puede observar en las columnas de un edificio. La columna tiene un eje axial que la atraviesa desde arriba hacia abajo. La columna está sometida constantemente a una fuerza axial de compresión ejercida por el techo del edificio.

En el ejemplo de la columna, la fuerza axial atraviesa el centro geométrico de la forma, lo que hace que la fuerza sea concéntrica. Si el eje axial que recorre la fuerza axial no pasa por el centro geométrico, la fuerza es excéntrica. Los objetos en los que actúan fuerzas axiales excéntricas no podrán soportar grandes cantidades de energía, mientras que los objetos en los que la fuerza axial es concéntrica pueden hacer frente a mayores cantidades. (Ciencia y tecnología, 2013)

### **Flexión**

Tipo de deformación que presenta un elemento estructural alargado en una dirección perpendicular a su eje longitudinal. El término “alargado” se aplica cuando una dimensión es dominante frente a las otras. (Flores Colín & Gallegos Arzate, 2010)

La flexión se presenta acompañada de fuerzas cortantes. Sin embargo, la resistencia a flexión puede estimarse con suficiente precisión despreciado el efecto de la fuerza cortante. Podemos ver el comportamiento de elementos sujetos a flexión y efecto de las principales variables, y se presentan métodos para calcular la resistencia. Toda sección transversal desarrolla internamente un par de esfuerzos normales a la sección (de tracción a un lado del elemento y de compresión al otro lado). (ARQHYS, 2017)

### **Flexo – compresión**

Todos comenzamos estudiando el caso de columnas sometidas a carga axial o carga concéntrica, es decir columnas inicialmente rectas y sin excentricidad. Adicional a ello, sabemos que las columnas son elementos que están sometidos principalmente a esfuerzos de flexo-compresión.

La mayor parte de los elementos estructurales sometidos a compresión también están solicitados por momentos flectores, por lo que en su diseño debe tomarse en consideración la presencia simultánea de los dos tipos de acciones. En zonas sísmicas, como las existentes en nuestro país, el efecto flexionante usualmente domina el diseño con relación a las solicitaciones axiales por lo que, a pesar de que los momentos por cargas gravitacionales sean importantes, se suelen escoger columnas con armadura simétrica, dada la reversibilidad de los sismos.

El comportamiento de secciones específicas de columnas de concreto armado es descrito más claramente mediante gráficos denominados curvas o diagramas de interacción. Sobre el eje vertical se dibujan las cargas axiales resistentes y sobre el eje horizontal se representan los correspondientes momentos flectores resistentes, medidos con relación a un eje principal centroidal de la sección transversal de la columna. (Rincón)

### c) Bases de diseño

#### PROCEDIMIENTO DE CALCULO DE SECCIONES SIN REFORZAMIENTO

PASO 1.- Con los datos ingresados los datos de resistencia a compresión del concreto cuyas variables es:

$f'_c$  = valor del esfuerzo a compresión del concreto,

$\varepsilon_0 = 0.002$ , donde  $\varepsilon_0$  es la deformación a la cual el concreto alcanza su máxima resistencia a compresión.

De la curva de compresión para un concreto sin confinamiento, la formula se puede encontrar en el libro "ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO, R. PARK-T. PAULAY, pág. 15"

$$f(\varepsilon_c) = \begin{cases} f_{2c} \left[ 2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right], & \text{cuando } \varepsilon_c \leq 0.002 \\ f_{2c} [1 - 100(\varepsilon_c - \varepsilon_0)], & \text{cuando } \varepsilon_c > 0.002 \end{cases}$$

PASO 2.- Se ingresa de las características del acero como es el módulo de elasticidad y esfuerzo de fluencia para el acero.

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo de fluencia del acero

$$E_s = 2100,000 \text{ kg/cm}^2$$

Módulo de elasticidad del acero

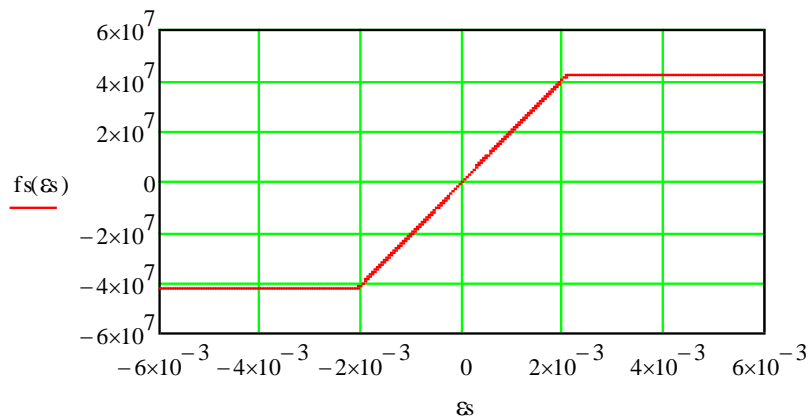
Y con estos datos se construye la gráfica bilineal (bilineal porque tiene 02 tramos de líneas en la su representación gráfica; ver gráfico 3) del acero, cuya ecuación se presenta, esta grafica indica que para cualquier deformación del acero de la columna se va a encuentra un valor del esfuerzo de este acero, y  $F_s(\varepsilon_s)$  es el valor del esfuerzo del acero para una deformación dada.

$$F_s(\varepsilon_s) := \begin{cases} -f_y, & \text{cuando } \varepsilon_s < -\varepsilon_{s0} \\ E_s \cdot \varepsilon_s, & \text{cuando } -\varepsilon_{s0} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s0} \\ f_y, & \text{cuando } \varepsilon_s > \varepsilon_{s0} \end{cases}$$

Dónde:

$\varepsilon_{s0}$  = deformación unitaria del acero, variable en el "x" de la grafico N°3

La representación gráfica bilineal de la función anterior ( $F_s$ ) es:



**Gráfico 3: Curva bilineal del acero, bilineal porque hay dos tramos de recta con diferentes pendientes.**

Dentro de los cálculos realizados en ANEXO N°2, en las páginas 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90 y las páginas 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105 y se dan bajo el símbolo  $\epsilon_{si}$ , para esta deformación  $\epsilon_{si}$  le corresponde un valor del esfuerzo del acero según la función  $F_s(\epsilon_s)$ , se ingresó el valor  $\epsilon_{si}$  en la función.

PASO 3.- Se ingresan las dimensiones de la sección de análisis, indicadas con la variable "b" y "h", y el área de la sección del acero.

$b$ , ancho de la sección

$h$ , altura de la sección

$A_g$ , área de acero

PASO 4.- Para la construcción del diagrama de interacción de la columna se utilizará la gráfica anterior, para esto se utilizará el procedimiento descrito en el libro de "ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO" de T. Park.

Según descripción del libro "Para el concreto confinado se puede encontrar la distribución del esfuerzo en la parte comprimida de la sección, para cualquier deformación dada del concreto  $\epsilon_{cm}$  en la fibra extrema a compresión, se puede definir la fuerza de compresión del concreto y su posición en términos de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ .

$$\alpha_{\epsilon_{cm}} = \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} df \times d\epsilon_c}{f''_c \times \epsilon_{cm}}$$

$$\gamma_{\varepsilon_{cm}} = 1 - \frac{\int \varepsilon_c \times \sigma_{\varepsilon_c} \times d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \times \int_0 \sigma_{\varepsilon_c} \times d\varepsilon_c}$$

Dónde:

$\alpha_{\varepsilon_{cm}}$ , factor del esfuerzo medio

$\gamma_{\varepsilon_{cm}}$ , factor del centroide para cualquier deformación

df, diferencial del esfuerzo de compresión.

d  $\varepsilon_c$ , diferencial de deformación unitaria del concreto

PASO 4.- De los datos obtenidos en 3, se procede a calcular la deformación unitaria de cada acero de la columna, según la fórmula, para el cálculo se asume un valor inicial de deformación unitaria del concreto

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm} \times \frac{(kd - d_0)}{kd}$$

Dónde:

$\varepsilon_{si}$ , deformación del acero

$\varepsilon_{cm}$ , deformación asumida para el concreto equivalente a 0.003, valor para inicio de los cálculos, cálculos realizados en ANEXO N°2, en las páginas 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87,88, 89, 90 y las páginas 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105.

$d_0$ , es el peralte para cada acero de la sección de la columna.

$kd$ , es la profundidad del eje neutro.

Para el cálculo de los puntos del diagrama de iteración se comenzará la construcción, para valores diferentes de kd y también se ingresará deformación unitaria igual a  $\varepsilon_{cm} = 0.003$ .

Para el cálculo de la carga axial:

$$P_0 = \alpha_{\varepsilon_{cm}} \times f'c \times b \times kd + \sum_{i=0}^n fsi \times Asi$$

Y para el cálculo del Momento:

$$M_0 = \alpha_{\varepsilon_{cm}} \times f'_c \times b \times kd \left( \frac{h}{2} - \gamma_{\varepsilon_{cm}} \times kd \right) + \sum_{i=0}^n \left[ f_{si} \times A_{si} \times \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \right]$$

Del proceso de iteración de la hoja de Mathcad, presenta en Anexo N°2

Para comenzar se ingresa un valor aleatorio de kd con una deformación unitaria de 0.003 para el concreto (este valor de 0.003 se explica en el capítulo I, artículo d).

Con el valor ingreso de kd se va la formula descrita en el paso 4  $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm} \times \frac{(kd - d_0)}{kd}$ , el cual arroja un valor de la deformación unitaria para cada acero ( $\varepsilon_{si}$ ).

Con el valor de la deformación unitaria calculada de cada acero se ingresa a la formula

$$\alpha_{\varepsilon_{cm}} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} df \times d\varepsilon_c}{f''_c \times \varepsilon_{cm}} \text{ y } \gamma_{\varepsilon_{cm}} = 1 - \frac{\int \varepsilon_c \times \sigma_{\varepsilon_c} \times d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \times \int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_{\varepsilon_c} \times d\varepsilon_c}, \text{ la cual calcula } \alpha_{\varepsilon_{cm}} \text{ y } \gamma_{\varepsilon_{cm}},$$

para cada acero.

Luego de calcular los valores de  $\alpha_{\varepsilon_{cm}}$  y  $\gamma_{\varepsilon_{cm}}$ , se ingresa la siguiente formula donde se calcula la carga axial para el valor ingreso kd.

Cálculo de la carga axial:

$$P_0 = \alpha_{\varepsilon_{cm}} \times f'_c \times b \times kd + \sum_{i=0}^n f_{si} \times A_{si}$$

Y para el cálculo del Momento:

$$M_0 = \alpha_{\varepsilon_{cm}} \times f'_c \times b \times kd \left( \frac{h}{2} - \gamma_{\varepsilon_{cm}} \times kd \right) + \sum_{i=0}^n \left[ f_{si} \times A_{si} \times \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \right]$$

Con los valores de carga axial y de momento calculado se obtiene un punto de la gráfica, se vuelva a iniciar el proceso con el ingreso de otro valor de  $k_d$  y se obtiene un segundo punto.

En la presente tesis se describo un total de 9 puntos para realizar la gráfica, se debe entender que a mayor cantidad de valores de  $k_d$  se obtiene más puntos de carga axial y de momento y con este se podría obtener un grafica más precisa.

## PROCEDIMIENTO DE CALCULO DE SECCIONES CON REFORZAMIENTO

PASO 1.- El primer paso es el ingreso de las características del acero como es el módulo de elasticidad y esfuerzo de fluencia.

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Esfuerzo de fluencia del acero}$$

$$E_s = 2100,000 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Módulo de elasticidad del acero}$$

PASO 2.- Con los datos ingresados en "Paso 1" se construye el modelo bilineal del acero.

$$F_s(\epsilon_s) := \begin{cases} -f_y & \text{cuando } \epsilon_s < -\epsilon_{s0} \\ E_s \cdot \epsilon_s & \text{cuando } -\epsilon_{s0} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{s0} \\ f_y & \text{cuando } \epsilon_s > \epsilon_{s0} \end{cases}$$

PASO 3.- Se ingresa la resistencia compresión del concreto, con este valor se calcula el módulo de elasticidad del concreto.

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Resistencia a compresión del concreto}$$

$$E_c = 15000 \times \sqrt{f'_c} \quad \text{Módulo de elasticidad del concreto en kg/cm}^2$$

PASO 4.- Se ingresa las dimensiones de la sección de análisis, indicadas con la variable "b" y "h", y el área de la sección del acero.

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$A_g = \text{área de acero}$$





PASO 9.- Las características del esfuerzo de confinamiento del concreto se calcula usando:

$$f_{ck} = f_{ck} + k_b \times 2 \left[ E_{jl} \times \varepsilon_{juk} + (\rho_{wy} \times f_{syk} - \Delta p) \left( \frac{Dc - \frac{s_w}{2}}{D} \right)^2 \right]$$

PASO 10.- Para simplificar el cálculo del bloque de esfuerzo en el diseño, se usa el parámetro fc:

$$fc = f_{ck} + k_b \times 2(\rho_{wy} \times f_{syk} - \Delta p) \left( \frac{Dc - s_w}{D} \right)^2$$

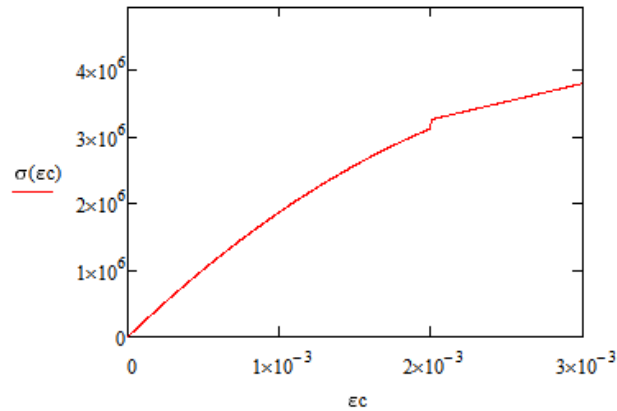
PASO 11.- Con los valores anteriores se calcula la curva propuesta por Lam y Teng, mediante la siguiente función  $\sigma_{\varepsilon_c}$ , donde  $\varepsilon_c$  va en el eje "x" y el valor de  $\sigma_{\varepsilon_c}$  va en el eje "y". La grafica de la función  $\sigma_{\varepsilon_c}$  se muestra en el grafico 4

$$\sigma_{\varepsilon_c} = \begin{cases} E_c \times \varepsilon_c - \frac{(E_c - E_2)^2 \times \varepsilon_c^2}{4 \times fc}, \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \\ E_2 \times \varepsilon_c + fc, \text{ cuando } \varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

PASO 12.- Los valores de la curva anterior son:

$$E_{\varepsilon_c} = \left[ E_{cm} \times \varepsilon_c - \frac{(E_{cm} - E_2)^2 \times \varepsilon_c^2}{4 \times fc} \right]$$

A continuación, se gráfica la ecuación del paso 11, obtenida para el concreto de  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  reforzado con fibra de carbono.



**Gráfico 4, Representación gráfica de función  $\sigma_{\epsilon_c}$**

**Fuente: Propia**

PASO 14.- Para la construcción del diagrama de interacción de la columna se utilizará el gráfico 4, según procedimiento descrito en el libro de "ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO" de T. Park.

Según el libro "Para el concreto confinado se puede encontrar la distribución del esfuerzo en la parte comprimida de la sección, para cualquier deformación dada del concreto  $\epsilon_{cm}$  en la fibra extrema a compresión, se puede definir la fuerza de compresión del concreto  $C_c$  y su posición en términos de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ .

$$\alpha_{\epsilon_{cm}} = \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} df \times d\epsilon_c}{f''_c \times \epsilon_{cm}}$$

$$\gamma_{\epsilon_{cm}} = 1 - \frac{\int \epsilon_c \times \sigma_{\epsilon_c} \times d\epsilon_c}{\epsilon_{cm} \times \int_0^{\epsilon_{cm}} \sigma_{\epsilon_c} \times d\epsilon_c}$$

Dónde:

$\alpha_{\epsilon_{cm}}$ , factor del esfuerzo medio

$\gamma_{\epsilon_{cm}}$ , factor del centroide para cualquier deformación

PASO 15.- De los datos obtenidos en 13, se procede a calcular la deformación unitaria de cada acero de la columna:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm} \times \frac{(kd - d_0)}{kd}$$

Dónde:

$\varepsilon_{si}$ , deformación del acero

$\varepsilon_{cm}$ , deformación asumida para el concreto, valor para inicio de los cálculos, cálculos realizados en ANEXO N°2, en las paginas 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87,88, 89, 90 y las paginas 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105.

$d_0$ , es el peralte para el acero en la columna.

$kd$ , es la profundidad del eje neutro.

Para el cálculo de los puntos del diagrama de iteración se comenzará la construcción, para valores diferentes de  $kd$  y una misma deformación unitaria igual a 0.003 (este valor de 0.003 se explica en el capítulo I, artículo d).

Para el cálculo de la carga axial:

$$P_0 = \alpha_{\varepsilon_{cm}} \times f'c \times b \times kd + \sum_{i=0}^n fsi \times Asi$$

Y para el cálculo del Momento:

$$M_0 = \alpha_{\varepsilon_{cm}} \times f'c \times b \times kd \left( \frac{h}{2} - \gamma_{\varepsilon_{cm}} \times kd \right) + \sum_{i=0}^n \left[ fsi \times Asi \times \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \right]$$

Para comenzar se ingresa un valor aleatorio de  $kd$  con una deformación unitaria de 0.003 para el concreto.

Con el valor ingreso de  $kd$  se va la formula descrita en el paso 4

$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm} \times \frac{(kd - d_0)}{kd}$ , el cual arroja un valor de la deformación unitaria para cada acero.

Con el valor de la deformación unitaria calculada de cada acero se ingresa

a la formula  $\alpha_{\epsilon_{cm}} = \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} df \times d\epsilon_c}{f'_c \times \epsilon_{cm}}$  y  $\gamma_{\epsilon_{cm}} = 1 - \frac{\int \epsilon_c \times \sigma_{\epsilon_c} \times d\epsilon_c}{\epsilon_{cm} \times \int_0 \sigma_{\epsilon_c} \times d\epsilon_c}$ , la cual calcula  $\alpha_{\epsilon_{cm}}$

$\gamma_{\epsilon_{cm}}$ , para cada acero.

Luego de calcular los valores de  $\alpha_{\epsilon_{cm}}$   $\gamma_{\epsilon_{cm}}$ , se ingresa la siguiente formula donde se calcula la carga axial para el valor ingreso kd.

Cálculo de la carga axial:

$$P_0 = \alpha_{\epsilon_{cm}} \times f'_c \times b \times kd + \sum_{i=0}^n fsi \times Asi$$

Y para el cálculo del Momento:

$$M_0 = \alpha_{\epsilon_{cm}} \times f'_c \times b \times kd \left( \frac{h}{2} - \gamma_{\epsilon_{cm}} \times kd \right) + \sum_{i=0}^n \left[ fsi \times Asi \times \left( \frac{h}{2} - d_i \right) \right]$$

Con los valores de carga axial y de momento calculado se obtiene un punto de la gráfica, se vuelve a iniciar con el ingreso de otro valor de kd y se obtiene un segundo punto.

En la presente tesis se describo un total de 9 puntos para realizar la gráfica, se debe entender que a mayor cantidad de valores de kd se obtiene más puntos de carga axial y de momento y con este se podría obtener un grafica más precisa.

## CAPITULO 3. HIPÓTESIS

### a) Formulación de la hipótesis.

#### Hipótesis general

- La evaluación de la resistencia a flexión de una columna cuadrada con refuerzo de fibras de carbono y otra sin refuerzo de fibra de carbono influye de manera significativa para medir la mejora estructural en columnas.

## CAPITULO 4. METODOLOGÍA

### a) Variables a comparar, flexión y compresión y este llevara a la mejora de la sección.

VARIABLE	DEFINICION CONCEPTUAL	DEFINICION OPERACIONAL	DIMENSIONES	INDICADOR	ITEM
CONDICIONES PARA LA MEJORA DE LA RESISTENCIA A COMPRESION DE LA COLUMNA REFORZADA	TIPO DE SECCIONES DE COLUMNA PARA REFORZAR, TAMAÑO Y CARACTERISTICAS DE LA FIBRA DE CARBONO A USAR	AUMENTO DE LA RESISTENCIA A COMPRESION, MEDIDA Y OBTENIDA EN CALCULOS EN EL CAPITULO 5	COLUMNA	RESISTENCIA A LA COMPRESION	MUESTRA MAYOR RESISTENCIA A LA COMPRESION DE LOS ELEMENTOS REFORZADOS CON FIBRA
CONDICIONES PARA LA MEJORA DE LA RESISTENCIA A FLEXION DE LA COLUMNA REFORZADA		AUMENTO DE LA RESISTENCIA A COMPRESION, MEDIDA Y OBTENIDA EN CALCULOS EN EL CAPITULO 5		RESISTENCIA A LA FLEXION	MUESTRA MAYOR RESISTENCIA A LA FLEXION DE LOS ELEMENTOS REFORZADOS CON FIBRA

### b) Diseño de Investigación

La presente investigación es descriptiva, comparativo cuasi experimental. Cabe señalar que fundamentamos el proceso en forma teórica, se hace el diseño teórico de una curva de interacción de una columna sin confinamiento externo y otra columna con reforzamiento externo usando fibra de carbono.

### c) Población

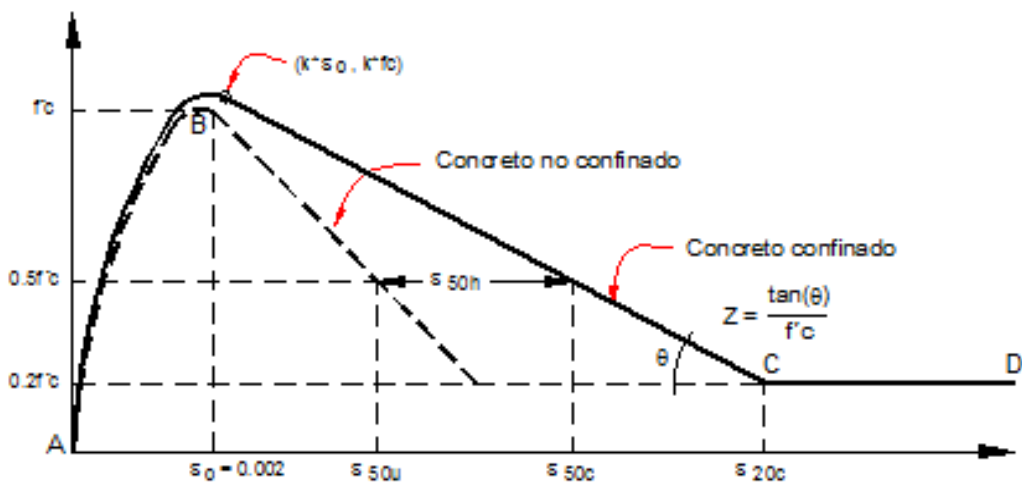
Columnas de concreto armado sin confinar y confinadas con mantas de fibra de carbono.

**d) Métodos, instrumentos y procedimientos de análisis de datos**

Para la presente tesis, distintos investigadores han propuesto relaciones esfuerzo-deformación para el concreto confinado por estribos, para este método se ha empleado como modelo el siguiente:

**Modelo de Kent Park, se usará para el cálculo del concreto sin refuerzo**

. EL grafico 4 muestra la curva propuesta por Kent y Park, cuya ecuación general proporciona una curva continua esfuerzo-deformación relacionando con la cuantía, el espaciamiento y resistencia de cedencia del acero transversal, además, del gradiente de deformación a través de la sección y la resistencia del concreto, usando esta gráfica se calculará el diagrama de interacción de las columnas analizadas y se presentan en el capítulo 6.



**Gráfico 2: Curva esfuerzo deformación para concreto confinado por estribos rectangulares, Kent y Park.**

En base a la evidencia experimental existente, Kent y Park propusieron la curva esfuerzo-deformación del gráfico 04 para concreto confinado por estribos rectangulares.

Para lograr calcular los resultados de manera rápida y precisa, en la investigación se ha empleado como instrumento un software para poder resolver las ecuaciones.

El software MATHCAD, es un software de computadora diseñado principalmente para la verificación, validación, documentación y re-uso de cálculos de ingeniería.

Finalmente, la recolección de datos ha sido producto de la búsqueda bibliográfica y el cálculo comparativo se realizó mediante la adición del módulo de elasticidad de la fibra de carbono SIKA WRAP 600C, presente en la especificación técnica anexa.

Los cálculos realizados con la metodología de Kent y Park se encuentran en el ANEXO N°2, en las paginas 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87,88, 89, 90 y las paginas 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105.



## CAPITULO 5. INVESTIGACIÓN

### DETERMINACIÓN DE LA CAPACIDAD DE COLUMNAS DE CONCRETO ARMADO

#### Columnas Cortas Cargadas Axialmente, RNE E060 (Reglamento Nacional de Edificaciones). -

La resistencia de columnas cortas de concreto armado sometidas a compresión pura está dada por la expresión:

$$P_n = A_{st} \times f_y + (A_g - A_{st}) f'_c \quad \text{Ecuación 0-1}$$

Sin embargo, el código ACI reconoce que no existe una columna real sometida a carga axial con excentricidad nula. En versiones anteriores, 1963 y 1971, se definieron excentricidades accidentales o excentricidades mínimas que debían ser consideradas en el diseño de cualquier columna para tomar en cuenta este efecto. A partir de 1977, el concepto de excentricidad accidental se suprimió y se reemplazó por otro mecanismo cuyo objetivo también era tomar en cuenta el hecho que no existen columnas con carga axial totalmente centrada. Este consistía en reducir la resistencia definida por la ecuación 1-1, transformándola en:

Si el refuerzo está constituido por espirales:

$$P_n = 0.85 \left[ A_{st} \times f_y + 0.85 \times (A_g - A_{st}) f'_c \right] \quad \text{Ecuación 1-2}$$

Si el refuerzo está constituido por estribos:

$$P_n = 0.85 \left[ A_{st} \times f_y + 0.80 \times (A_g - A_{st}) f'_c \right] \quad \text{Ecuación 1-3}$$

Dónde:

$A_g$  : Área de la sección bruta de la sección de concreto

$A_{st}$  : Área del refuerzo de la sección

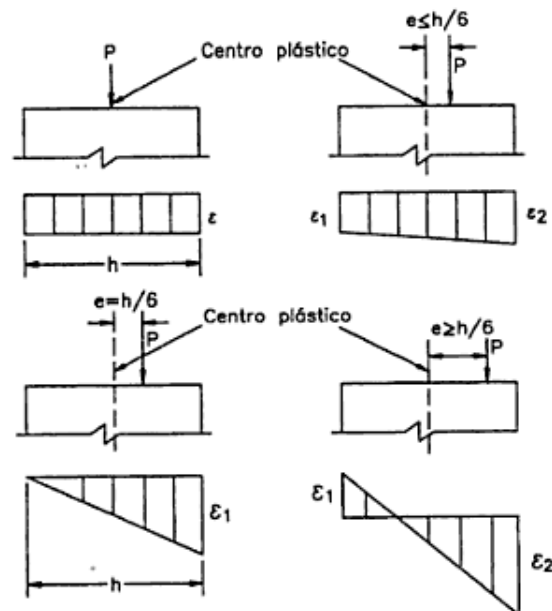
Los factores 0.85 y 0.80 son equivalentes a excentricidades de aproximadamente, 5% y 10% del lado para columnas con espiral y con estribos, respectivamente.

Los valores de  $P_u$  no podrán ser mayores que  $\phi P_n$  tanto para columnas sometidas a compresión pura como para columnas a flexo-compresión.

## ANÁLISIS DE COLUMNAS CORTAS SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN

Una columna sometida a flexo-compresión puede considerarse como el resultado de la acción de una carga axial y un momento flector.

Para el análisis, la excentricidad de la carga axial se tomará respecto al centro plástico. Este punto se caracteriza porque tiene la propiedad de una carga aplicada sobre él produce deformaciones uniformes en toda la sección. En secciones simétricas el centro plástico coincide con el centroide de la sección bruta y en secciones asimétricas coincide con el centroide de la sección transformada. Conforme la carga axial se aleja del centro plástico, la distribución de deformaciones se modifica, como se muestra en la figura.



(Park & Paulay, 1988)

**Gráfico 3: Variación de la distribución de deformaciones en la sección de acuerdo a la ubicación de la carga axial.**

Las hipótesis para el análisis de concreto a flexión pura son válidas también para el análisis de elementos sometidos a flexo-compresión.

Una columna con una distribución determinada de refuerzo y dimensiones definidas tiene infinitas combinaciones de carga axial y momento flector que puedan ocasionar su falla o lo que es equivalente, las cargas axiales que ocasionan el colapso dependen de la excentricidad con la que son aplicadas. Al igual que las secciones sometidas a flexión pura, las columnas pueden presentar falla por compresión, por tensión, o falla balanceada. Sin embargo, a diferencia de ellas, una columna puede presentar cualquiera de los tres tipos de falla dependiendo de la excentricidad de la carga axial que actúe sobre ellas.

Si esta es pequeña, la falla será por compresión; si la excentricidad es mayor, la falla es por tensión. Además, cada sección tiene una excentricidad única, denominada excentricidad balanceada que ocasiona la falla balanceada de la sección.

Puesto que cada columna puede presentar tres tipos de falla distintas, cada una cuenta con tres juegos de ecuaciones que definen su resistencia, ya sea en términos de carga axial y momento resistente, o en términos de carga axial resistente para una determinada excentricidad. El procedimiento para determinar estas ecuaciones es sencillo.

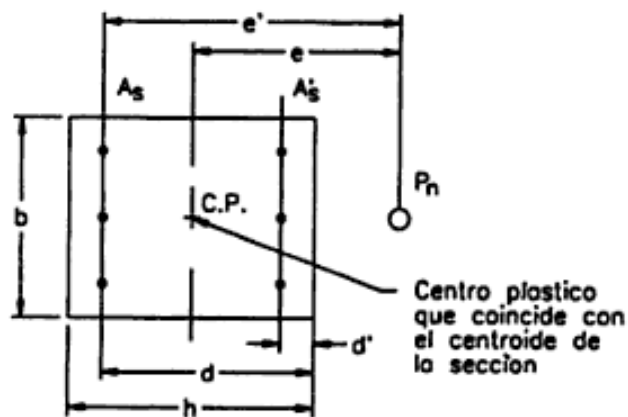


Gráfico 4: Sección rectangular analizada con refuerzo simétrico

Para determinar la ecuación que corresponde a la condición de falla por compresión, se supone un diagrama de deformaciones, el cual es mostrado en el gráfico 6, en el cual se genera los esfuerzos internos mostrados. La capacidad resistente del elemento estará dada por la resultante de las fuerzas desarrolladas en el acero y concreto. Por lo tanto:

$$Pn = 0.85 \times f'_c ba + A'_s f'_s - A_s f_s \quad \text{Ecuación 1-4}$$

$$Mn = 0.85 \times f'_c ba \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s f_s \left( d - \frac{h}{2} \right) \quad \text{Ecuación 1-5}$$

Los esfuerzos en el acero en compresión y en tensión se determinan por semejanza de triángulos:

$$f'_s = \frac{0.003(c - d')}{c} E_s = \frac{6117(c - d')}{c} \leq f_y \quad \text{Ecuación 1-6}$$

$$f_s = \frac{0.003(c - d')}{c} E_s = \frac{6117(c - d')}{c} \quad \text{Ecuación 1-7}$$

Whitney propuso la siguiente aproximación para determinar la resistencia a compresión de una columna que falla en compresión:

$$P_n = \frac{A'_s \times f_y}{\left[ \frac{e}{(d - d')} \right] + 0.5} + \frac{b h f'_c}{\left( \frac{3 h e}{d^2} \right) + 1.18} \quad \text{Ecuación 1-8}$$

Esta expresión es válida para secciones con refuerzo simétrico dispuesto en capas paralelas al eje alrededor del cual se produce la flexión.

Cuando la falla es balanceada, el refuerzo en tensión alcanza el esfuerzo de fluencia y simultáneamente el concreto llega a una deformación unitaria de 0.003. La deformación en la sección es como se muestra en el gráfico 6(b). En este caso, la resistencia de la columna será:

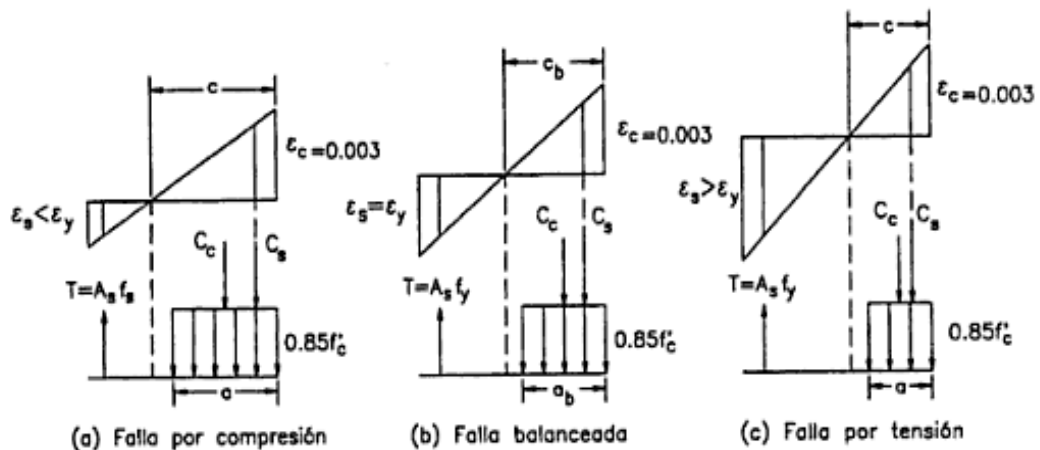


Gráfico 5: Tipos de falla de columnas sometidas a flexo-compresión

$$P_n = 0.85 \times f'_c b a + A'_s f'_s - A_s f_s \quad \text{Ecuación 1-4}$$

$$M_n = 0.85 \times f'_c b a_b \left( \frac{h}{2} - \frac{a_b}{2} \right) + A'_s f'_s \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s f_s \left( d - \frac{h}{2} \right)$$

Ecuación 1-9

Dónde:

$$a_b = \beta_1 \frac{6117}{6117 + f_y} d \quad \text{Ecuación 1-10}$$

La excentricidad balanceada de la sección estará dada por:

$$e_b = \frac{M_{nb}}{P_{nb}} \quad \text{Ecuación 1-11}$$

Whitney propuso las siguientes expresiones simplificadas para la determinación de la excentricidad balanceada de una sección:

Sección rectangular  $e_b = h(0.20 + 0.77\rho_t m)$  Ecuación 1-12

Sección circular  $e_b = h(0.20 + 0.39\rho_t m)$  Ecuación 1-13

Dónde:  $\rho_t = \frac{A_{st}}{bd}$  y  $m = \frac{f_y}{0.85f'_c}$  Ecuación 1-14

Si la columna falla por tracción, el acero en tensión alcanzará el esfuerzo de fluencia, la carga última será menor que  $P_b$  y la excentricidad de la carga será mayor que la excentricidad balanceada. La deformación en la sección será la mostrada en el gráfico N°6 (c) y su resistencia está dada por:

$$P_n = 0.85 \times f'_c b a + A'_s f'_s - A_s f_s \quad \text{Ecuación 1-4}$$

$$M_n = 0.85 \times f'_c b a \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s f_s \left( d - \frac{h}{2} \right) \quad \text{Ecuación 1-5}$$

La resistencia nominal de una columna que falla por tensión se puede determinar aproximadamente a través de la siguiente expresión, propuesta por el Comité ACI 318ACI de 1963:

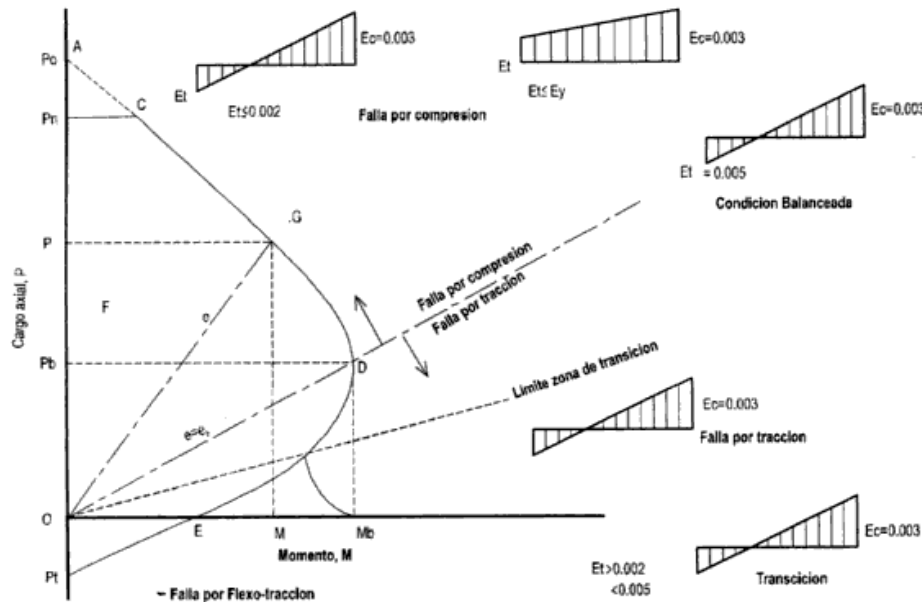
$$P_n = 0.85 f'_c b d \left[ \left( -\rho + 1 - \frac{e'}{d} \right) + \sqrt{\left( 1 - \frac{e'}{d} \right)^2 + 2\rho m \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) + 2\rho \frac{e'}{d}} \right]$$

Ecuación 1-15

Dónde:  $m' = m + 1$  y  $e' = e + \frac{d}{2}$

La expresión anterior es válida para secciones simétricas.

La representación gráfica de las combinaciones carga axial-momento flector que generan la falla de una sección se denomina diagrama de interacción. En el gráfico N°07.



**Gráfico 6: Diagrama de interacción de una sección rectangular con refuerzo simétrico.**

El punto A corresponde a la carga axial de rotura teórica cuando la sección no está sometida a flexión. El código ACI recomienda tomar un porcentaje de esta carga como resistencia de la sección. La recta BC responde a esta limitación. El punto D de la curva representa la combinación de carga y momento que define la condición balanceada. Las combinaciones carga axial-momento contenidas en el tramo CD generan fallas por compresión, mientras que en el tramo DE, las fallas son por tensión. El punto E del diagrama de interacción representa un estado de flexión pura en el elemento.

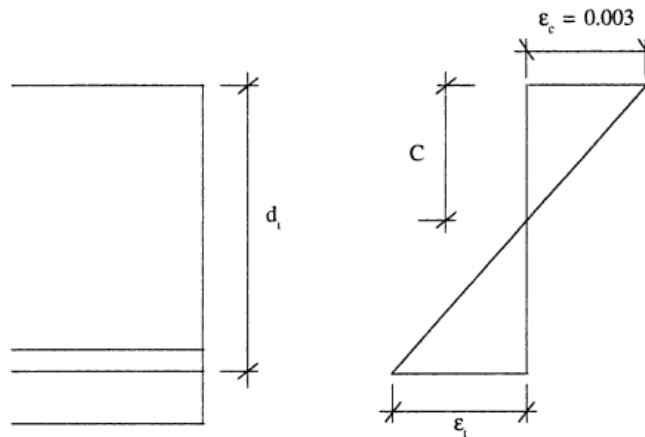
El comportamiento en este caso es similar al de una viga. En el diagrama presentado en el gráfico N°07, se puede observar que:

- La carga máxima axial que puede soportar una columna corresponde a la combinación carga axial-momento flector en el cual el momento es nulo.
- El máximo momento flector que puede soportar una columna corresponde al estado de flexión pura.
- Cada carga axial se combina solo con un momento flector para producir la falla mientras que cada momento flector puede combinarse con dos cargas axiales para lograr el mismo efecto.

- Todos los puntos dentro del diagrama de interacción, como el punto F, representan combinaciones de carga axial-momento flector que pueden ser resistidas por la sección. Los puntos fuera del diagrama, como el punto G son combinaciones que ocasionaría la falla.

Una recta que une el origen con un punto sobre el diagrama de interacción puede interpretarse como la historia de carga de una sección con carga excéntrica fija que es incrementada hasta la rotura.

El diagrama de interacción representa todas las combinaciones de falla y por ende constituye una descripción completa de la capacidad resistente de una sección.

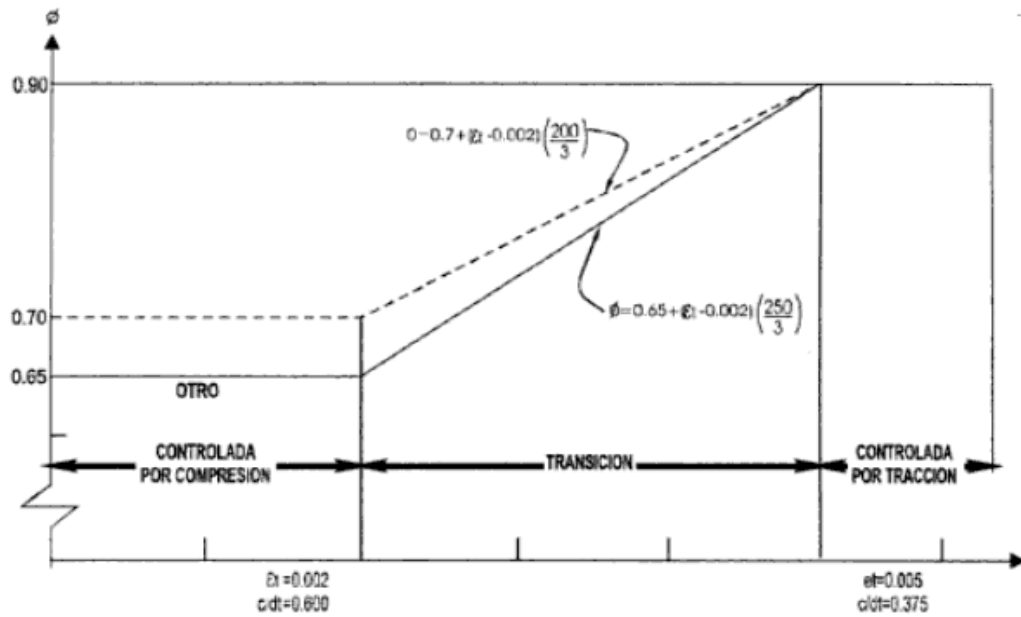


**Gráfico 7: Distribución de deformaciones unitarias en una sección**

Se considera una sección controlada por compresión cuando la deformación por tracción en el acero  $\epsilon_s$  es igual o menor que la que corresponde al límite elástico del acero  $f_y$  en el momento que el concreto llega a una deformación  $\epsilon_c = 0.003$ . Se puede tomar  $\epsilon_s = 0.002$  para acero grado 60 ó para refuerzo de pretensado.

Se considera una sección controlada por tracción cuando  $\epsilon_t \geq 0.005$ . Para secciones con cargas axiales menores de  $0.1f'_c A_g \epsilon_t$  no se toman valores menores que 0.004.

Las secciones con deformaciones unitarias entre  $\epsilon_t = 0.002$  y  $\epsilon_t = 0.005$  son de transición y en ellas se puede variar el factor entre los límites indicados para compresión,  $\phi = 0.70$  para elementos con refuerzo en espiral a  $\phi = 0.65$  para otros elementos en compresión, o  $\phi = 0.90$  para los elementos controlados por tracción.



**Gráfico 8: Variación del factor  $\phi$  (columnas)**

Interpretación en  $c/d_t$  :

Refuerzo en espiral  $\phi = 0.70 + 0.20 \left( \frac{1}{c/d_t} - \frac{5}{3} \right)$  Ecuación 1.13

Refuerzo de estribo  $\phi = 0.65 + 0.25 \left( \frac{1}{c/d_t} - \frac{5}{3} \right)$  Ecuación 1.14

Los diagramas de interacción pueden expresarse en términos de esfuerzos, de modo que no dependan de las dimensiones de la sección. Estas curvas son especialmente útiles para el diseño de columnas.

Diseño de columnas cortas de concreto armado

Para estimar, en principio, las dimensiones de la sección, se suele emplear expresiones como las siguientes:

$$A_g \geq \frac{P}{0.10(f'_c + f_y \times \rho_t)} \quad \text{Ecuación 1-16}$$

$$\text{O} \quad A_g \geq \frac{P}{0.10 f'_c}$$



Para columnas con refuerzo en espiral:

$$A_g \geq \frac{P}{0.15(f'_c + f_y \times \rho_t)}$$

Ecuación 1-17

$$\text{O} \quad A_g \geq \frac{P}{0.15 f'_c}$$

Dónde:

$$\rho_t = \frac{A_{st}}{A_g}$$

A partir del área estimada, se definen las dimensiones de la sección del elemento, las cuales suelen ser múltiplos de 5cm. Si la columna está sometida a momentos flectores elevados, el área estimada a través de las expresiones 1-16 y 1-17 puede resultar insuficiente.

### Limitaciones del refuerzo en miembros a compresión

El código ACI recomienda una cuantía mínima y una cuantía máxima de refuerzo que se debe utilizar en columnas, de acuerdo a algunos criterios que se presentan a continuación (ACI-10.9).

El refuerzo longitudinal de una columna le provee resistencia a la flexión y reduce los efectos de creep y contracción del concreto bajo cargas sostenidas.

Los ensayos han demostrado que estos efectos tienden a transferir la carga del concreto al refuerzo, con el consiguiente incremento del esfuerzo en el acero. Esta transferencia se acentúa conforme la cuantía disminuye y cuando esta es muy pequeña, el acero entra en fluencia bajo cargas de servicio. Por ello, el código recomienda un área de refuerzo longitudinal de, por lo menos, 0.01 veces el área de la sección bruta de la columna.

En términos prácticos, la cantidad de acero está limitada por cuestiones constructivas ya que, si la columna cuenta con demasiado refuerzo, el vaciado del concreto se vuelve un proceso muy difícil. Las cuantías altas sugieren que es conveniente reconsiderar las dimensiones de la sección transversal. El código sugiere, como máximo, un área de acero equivalente a 0.06 veces el área de la sección de la columna (en zonas sísmicas). Sin embargo, en la práctica, rara vez se excede 0.04 por las dificultades que se presentan durante su armado.

Las columnas con estribos rectangulares y circulares requieren, como mínimo, cuatro varillas longitudinales. Si se emplea refuerzo transversal espiral son necesarias, por lo menos, seis barras longitudinales (ACI-10.9.2). Las columnas que tengan secciones diferentes requieren de, por lo menos, una varilla en cada esquina.

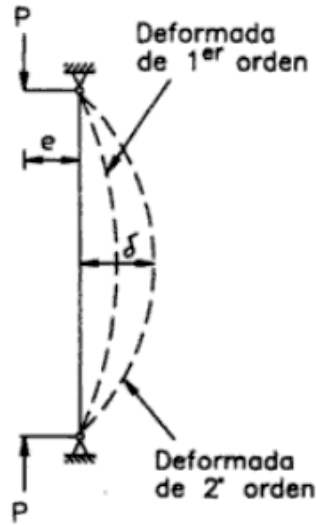
### Columnas Esbeltas de Concreto Armado

Las columnas de concreto armado, son por lo general, son poco esbeltas y su falla no se produce por pandeo. Sin embargo, los momentos de segundo orden reducen la capacidad resistente y dependiendo de la esbeltez de la columna, dicha reducción podría ser considerable.

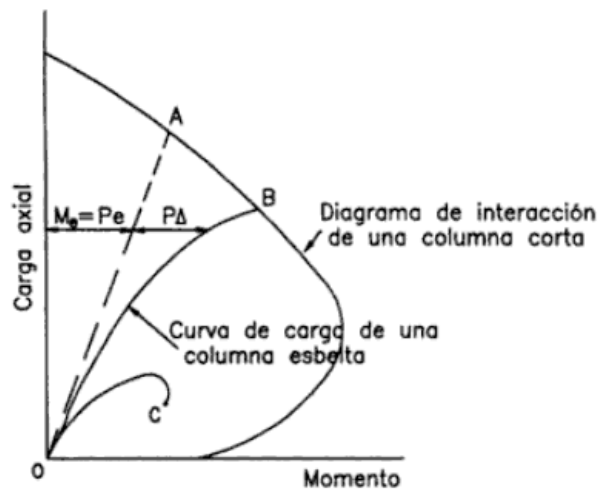
En el gráfico N°05 se presenta una columna sometida a una carga  $P$  con una excentricidad  $e$ , igual en ambos extremos. El momento flector en el elemento es constante e igual a  $Pe$  y genera una deformada cuya configuración corresponde, aproximadamente, a media onda sinusoidal. Estas deflexiones, conocidas como deformaciones de primer orden, incrementan la excentricidad de la carga axial a lo largo del elemento y generan momentos de segundo orden que a su vez ocasionan deformaciones adicionales.

En el gráfico N°06 se muestra el diagrama de interacción de una columna, el cual como se indicó, es la representación gráfica de las combinaciones de carga axial y momento flector que ocasionan la falla. La falla definida por el diagrama de iteración se produce cuando se alcanza la resistencia del concreto y, por lo tanto, es independiente de la esbeltez. Si una columna corta es cargada progresivamente con una excentricidad constante, su historia de carga puede ser representada por una línea, por ejemplo, la línea de puntos OA- Por el contrario, en una columna esbelta, los momentos secundarios cobran importancia y la excentricidad se incrementa con las sollicitaciones.

En este caso, la línea curva OB representa la historia de carga. La excentricidad se incrementa gradualmente por lo que la curva se inclina cada vez más hasta alcanzar la falla. Si se presentara el caso poco común de falla por pandeo, la curva OC representaría su proceso de carga. Como se aprecia, la curva no intercepta el diagrama de interacción, ya que la columna nunca alcanza su resistencia máxima.



**Gráfico 9: Columna de concreto armado sometida a carga  $P$ , excéntrica**



**Gráfico 10: Diagrama de interacción de columnas cortas y esbeltas**

Si los efectos de 2° orden disminuyen la resistencia de la columna a la carga axial en menos del 5%, estos pueden despreciarse y la columna se diseña sin tomar en cuenta el efecto de la esbeltez.

El código del ACI recomienda que el efecto de esbeltez se desprecie si se cumple:

Para columnas no arriostradas:  $\frac{kl_u}{r} \leq 22$  Ecuación 1-18

Para columnas arriostradas:  $\frac{kl_u}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$  Ecuación 1-19

Dónde:

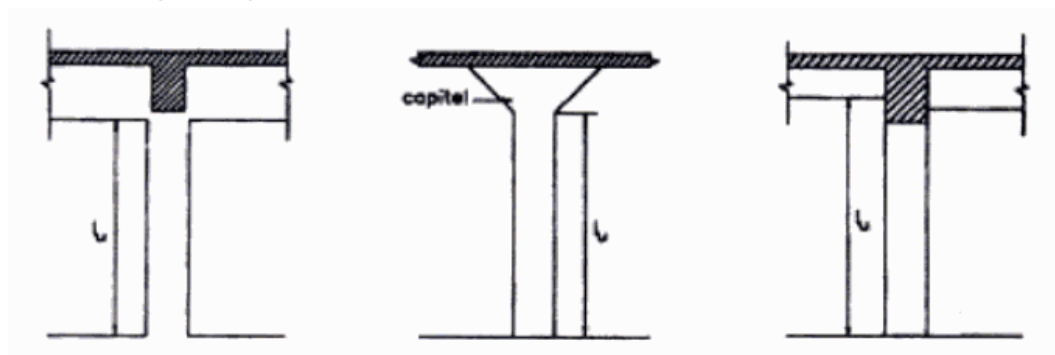
$k$ : Factor de longitud efectiva, que puede ser estimado empleando los nomogramas de Jackson & Moreland...

$l_u$ : Longitud libre de la columna. En el gráfico N°12 se muestra el valor de  $l_u$  para diferentes casos.

$r$ : Radio de giro de la sección de la columna que puede considerarse igual a 0.3h para columnas rectangulares y a 0.25d para las circulares, donde h y d son las dimensiones de la sección transversal en la dirección del análisis.

$M_1$ : Menor momento amplificado en un extremo de la columna. Es positivo si la columna se deforma bajo curvatura simple y negativo si se deforma bajo curvatura doble.

$M_2$ : Mayor momento amplificado en el otro extremo de la columna. Siempre es positivo.



**Gráfico 11: Longitud libre de la columna.**

En la expresión (1-19), el cociente  $\frac{M_1}{M_2}$  debe considerarse siempre mayor que 0.5

## MODELOS MATEMATICOS PARA EL CONFINAMIENTO EXTERNO DE COLUMNAS CON FRP

### Desarrollo de los FRP

El primer trabajo experimental donde se usaron los materiales de FRP para el refuerzo de estructuras de concreto armado se remonta al año 1978 en Alemania. Sin embargo, las primeras aplicaciones se realizaron en Suiza, tras unos trabajos dirigidos a la mejora de la resistencia a flexión de las estructuras de algunos puentes de concreto armado en 1987.

Las primeras aplicaciones de la técnica de confinamiento por FRP, a columna de concreto armado se realizaron en Japón en los años ochenta. Sin embargo, el uso de FRPs en ese país aumento en forma súbita en 1995 tras el terremoto de Hyogoken Nanbu.

En Estados Unidos se ha mantenido, desde los años treinta, un interés constante y continuo en el refuerzo por FRP de las estructuras de concreto armado. Sin embargo, el desarrollo en el uso de estos refuerzos tuvo lugar en los años ochenta, tras iniciativas de la National Science Foundation (NSF) y de la Federak Highway Administration (FHWA).

Las aportaciones más significativas en cuanto a investigación y aplicación del refuerzo mediante FRP en la rehabilitación de estructuras de concreto armado ocurren a final de los noventa y principios de este siglo.

En los últimos diez años, ha tenido lugar el desarrollo de códigos y normas para el refuerzo mediante FRP en Europa, Japón, Canadá, y los Estados Unidos. La Japan Society of Civil Engineers (JSCE), la Japan Concrete Institute (JCI) y el Railway Technical Research Institute (RTRI) han publicado varios documentos relacionados al uso de materiales de FRP en estructuras de concreto.

En Europa, la International Federation for Structural Concrete (FIB) publicó, en 2001 un boletín con una guía de diseño por refuerzos de estructuras de concreto armado por FRP. La Canada Standards Association han sido instituciones muy activas en el desarrollo de guías de diseño por refuerzos de estructuras de concreto armado por FRP.

En los Estados Unidos, el criterio por evaluar los sistemas de FRP está empezando a estar disponible en la industria de la construcción.

## Refuerzo y confinamiento

El tensor de deformaciones relativo al sólido teórico de Saint Venant es sometido a compresión simple (Ecuación 1-20, Ecuación 1-21 y Ecuación 1-22), se puede comprobar que el estado tensional es de tipo mono axial y que si se quisiera proporcionar una disminución de la tensión axial,  $\sigma_3 = P/A$ , sin disminuir  $P$ , se podría proceder de dos formas distintas: Aumentar la sección resistente ( $A$ ) e Impedir la libre dilatación en el plano ortogonal al eje.

$$\varepsilon_1 E = -\nu \frac{N}{A} \quad \text{Ecuación 1-20}$$

$$\varepsilon_2 E = -\nu \frac{N}{A} \quad \text{Ecuación 1-21}$$

$$\varepsilon_3 E = \frac{N}{A} \quad \text{Ecuación 1-22}$$

Se puede comprobar que cuando las dilataciones tienden a cero,  $P$  tiende al infinito. De esta forma, las técnicas para el refuerzo de columnas actúan y se servirán de ambos mecanismos, con distintas proporciones entre ellas.

Con la técnica de encamisado del concreto el efecto más eficaz es el aumento de la sección resistente proporcionado por el recocado de concreto, mientras que en el caso del refuerzo por FRP este efecto es insignificante en la mayoría de las ocasiones.

Impedir totalmente la libre dilatación del concreto es imposible, pero es posible limitarla por medio de un confinamiento, que puede ser pasivo o activo. En el primer caso, el confinamiento del conjunto de materiales que constituyen la sección resistente se consigue mediante fuerzas internas. En el segundo caso, el confinamiento lo proporcionan fuerzas externas, como en el caso de un cuerpo sumergido sometido a la presión hidrostática del agua.

En todas las técnicas de refuerzo, el confinamiento es de tipo pasivo: en la técnica por encamisado del concreto armado el confinamiento lo proporcionan los estribos de acero, incluidos en el recocado de concreto; en la técnica por encamisado de acero, el confinamiento lo realiza el conjunto de angulares y platinas, en el plano de la sección; en el caso del FRP, el confinamiento lo realizan las fibras de polímero.

Se demostró que la resistencia y la correspondiente deformación longitudinal del concreto confinado por una presión hidrostática pueden representarse por las siguientes expresiones:

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_l \times f_l \quad \text{Ecuación 1-23}$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left( 1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{co}} \right) \quad \text{Ecuación 1-24}$$

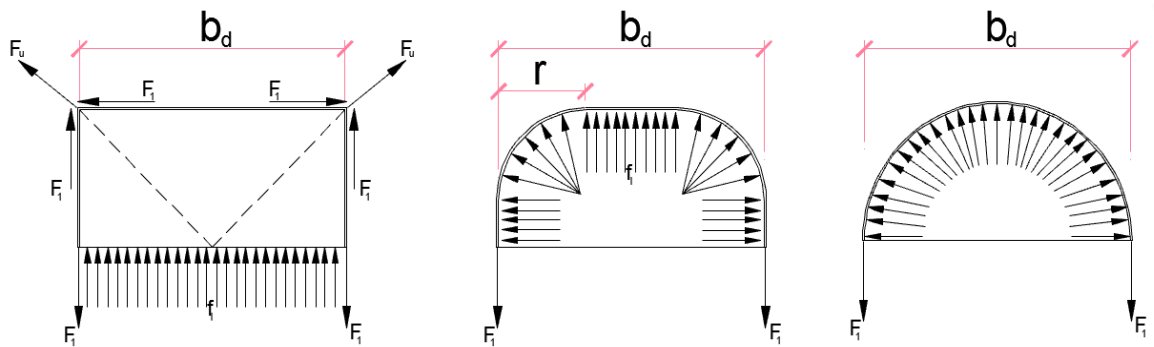
Donde  $f'_{cc}$  y  $\varepsilon_{cc}$  son la tensión máxima y la correspondiente deformación, respectivamente, del concreto sometido a la presión uniforme de confinamiento,  $f_l$ ;  $f'_{co}$  y  $\varepsilon_{co}$  son la tensión máxima y la correspondiente deformación, respectivamente, del concreto no confinado.

Las fórmulas expuestas representan la base de los modelos de diseño, que sucesivamente fueron propuestos por otros investigadores.

### Refuerzo por FRP de columnas de sección rectangular

Las fórmulas propuestas (Ecuación 1-23 y Ecuación 1-24) se aplican directamente al caso de columnas con sección circular, donde la tensión de confinamiento, proporcionado por el FRP, se puede suponer aproximadamente uniforme, en el plano de la sección, -como en el caso de la presión hidrostática-, mientras en el caso de secciones rectangulares la tensión de confinamiento no es uniforme; lo que hace el estado tensional de tipo triaxial.

Para determinar la presión de confinamiento real proporcionada por los FRP es posible referirse al equilibrio del cuerpo rígido de la sección transversal (Gráfico N°13) sometida a la presión de confinamiento uniforme  $f_l$  y a las fuerzas localizadas en las condiciones límite del FRP.



**Gráfico 12: Equilibrio de cuerpo rígido en una sección transversal**

Es evidente que en las secciones no circulares se verifica una concentración de la tensión en las esquinas, tanto mayor cuanto menor es el radio de dicha esquina, lo que provoca una variación de la presión de confinamiento que afecta a la sección.

Esta circunstancia implica una menor efectividad del confinamiento por FRP en el caso de las secciones cuadrangulares, debido al hecho que, a diferencia de la sección circular, la sección efectivamente confinada es menor que la sección total. La proporción entre el área efectivamente confinada y área total proporcionará el coeficiente de confinamiento, relativo a la sección de concreto,  $k_e$ .

## **Modelos de análisis y diseño de refuerzos por FRP**

### **Clasificación de los modelos de análisis y diseño**

En la última década se han desarrollado varios modelos, propuestos por varios autores, para la representación del comportamiento tensión-deformación de columnas de concreto confinado mediante FRP, sometidas a compresión simple, con secciones circulares y cuadrangulares.

Estos modelos se clasifican en dos categorías principales: Modelos de diseño, donde la resistencia a compresión axial, la deformación axial última y el comportamiento tensión-deformación se determinan utilizando expresiones en forma cerrada, obtenidas como mejor aproximación de los datos experimentales y es el que se usará en el análisis de las secciones, y modelos de análisis, que permiten predecir diagramas tensión-deformación mediante procesos numéricos iterativos.

Los modelos de análisis tienen una mejor capacidad predictiva de los modelos de diseño, y por eso un acercamiento racional para el desarrollo de un modelo de diseño se basa en los resultados de un modelo de análisis numérico. Una recopilación completa de modelos de análisis se ha publicado recientemente por Lian y Teng (2009).

Otras investigaciones relativas al refuerzo de columnas de concreto armado, de sección circular y cuadrangular, todavía han quedado incompletas o aproximadas, debido a los altos importes y al requerimiento de ensayos complejos. Eso ha causado, en la mayoría de los modelos disponibles, la ausencia o la imprecisión de algunos importantes efectos relativos al comportamiento de los elementos ensayados:

- La dimensión de la sección.
- Las proporciones entre dimensiones de la sección.
- La presencia de eventuales efectos perjudiciales debidos a la inestabilidad del armado longitudinal.
- El comportamiento no lineal de los materiales.
- La contribución del armado transversal.



A pesar de estos obstáculos muchos modelos propuestos, en el caso de columnas de sección cuadrangular, han sido empleados como bases de los códigos de diseño. La mayoría de estos modelos proceden de investigaciones relativas a columnas de sección circular y adaptados, al caso de sección rectangular, mediante utilización de un factor de forma, o bien un factor de eficiencia, con la intención de simular una equivalencia en los efectos de confinamiento entre la sección rectangular y la circular, para poder utilizar el modelo.

Muchas investigaciones desarrollan la base teórica de los modelos de confinamiento por acero, equiparando el comportamiento de los polímeros al del acero.

A continuación, se recopilará un elenco de modelos de análisis y de diseño que se usaran para el análisis y diseño de las secciones a reforzar, con la intención de coger los aspectos fundamentales de los efectos debidos al confinamiento y de las variables que los causan.

Se informará del desarrollo completo del modelo de Mander (1988); a pesar de que se desarrolló por confinamiento mediante estribos de acero, constituye la base de muchas investigaciones sucesivas por la calibración de modelos de confinamiento por FRP y fue uno de los primeros modelos para predecir el comportamiento de la sección con FRP.

### Modelo de R. Park y T Paulay

Distintos investigadores han propuesto relaciones esfuerzo-deformación para el concreto confinado por estribos rectangulares. EL gráfico 16 muestra la curva propuesta por Sargin y otros cuya ecuación general proporciona una curva continua esfuerzo-deformación relacionando con la cuantía, el espaciamiento y resistencia de cedencia del acero transversal, además, del gradiente de deformación a través de la sección y la resistencia del concreto.

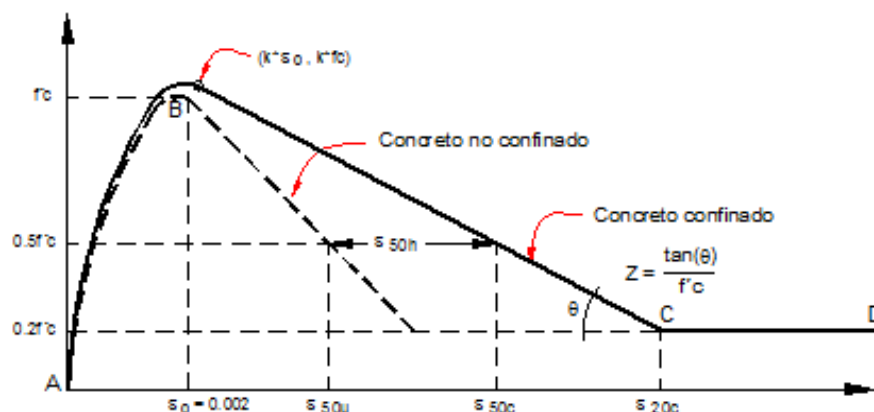


Gráfico 13: Curva esfuerzo deformación para concreto confinado por estribos rectangulares, Kent y Park.

En base a la evidencia experimental existente, Kent y Park propusieron la curva esfuerzo-deformación del gráfico 16 para concreto confinado por estribos rectangulares. Esta relación combina muchas de las características propuestas por Sargin. Las características de la curva propuesta son como sigue:

Región AB:  $\varepsilon_c \leq 0.002$

$$f_c = f'_c \left[ \frac{2\varepsilon_c}{0.002} - \left( \frac{\varepsilon_c}{0.002} \right) \right] \quad \text{Ecuación 1-25}$$

Esta parte ascendente de la curva está representada por una parábola de segundo grado y supone que el acero de confinamiento no afecta el perfil de esta parte de la curva o la deformación al esfuerzo máximo. También se supone que el esfuerzo máximo que alcanza el concreto confinado es la resistencia  $f'_c$  de la probeta.

Región BC:  $0.002 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20c}$

$$f_c = f'_c [1 - Z(\varepsilon_c - 0.002)] \quad \text{Ecuación 1-26}$$

Dónde:

$$Z = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} + \varepsilon_{50h} - 0.002} \quad \text{Ecuación 1-27}$$

$$\varepsilon_{50u} = \frac{3 + 0.002 f'_c}{f'_c - 1000} \quad \text{Ecuación 1-28}$$

$$\varepsilon_{50h} = \frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{b''}{s_h}} \quad \text{Ecuación 1-29}$$

Dónde:

$f'_c$ : Resistencia a compresión del cilindro de concreto.

$\rho_s$ : Relación del volumen de refuerzo transversal al del núcleo de concreto confinado medido al exterior de los estribos.

$b''$ : Ancho del núcleo confinado medido al exterior de los estribos.

$s_h$ : Espaciamiento de los estribos.

El parámetro  $Z$  define la pendiente de la recta de la rama descendente. La pendiente de la rama descendente se especifica por la deformación presente cuando el esfuerzo ha caído hasta  $0.5f'_c$  y se obtiene de resultados

experimentales. La ecuación 1-41 para  $\epsilon_{50u}$  toma en cuenta el efecto de la resistencia del concreto en la pendiente de la rama descendente del concreto no confinado, ya que el concreto de alta resistencia es más frágil que el concreto de baja resistencia.

La ecuación 1-42 para  $\epsilon_{50h}$  da la ductilidad adicional debida a los estribos rectangulares. El recubrimiento se cae cuando el esfuerzo ha disminuido hasta la mitad del esfuerzo máximo. Se supuso que el núcleo confinado llegaba hasta los ejes centrales de los lados de los estribos, aunque es evidente que se tendrá solo un pequeño error si se considera que el núcleo confinado llega hasta el borde exterior de los estribos. Esto podría explicar la presencia de cierto recubrimiento a deformaciones altas.

$$\text{Región CD: } \epsilon_c \geq \epsilon_{20C}$$

$$f_c = 0.2f'_c \quad \text{Ecuación 1-30}$$

Esta ecuación toma en cuenta la capacidad del concreto de soportar ciertos esfuerzos a deformaciones muy altas.

Es claro que hay una considerable mejora en el comportamiento de la rama descendente para pequeñas cantidades de estribos rectangulares, pero esta mejora es consistentemente menos significativa al agregar más estribos.

### Breve descripción de los diferentes modelos para Concreto reforzado con fibra de carbono

#### a) Modelo de ACI Committee 440 2002 (ACI 440-2R-2002)

En el modelo publicado en el ACI 440.2R 2002 se propone el uso, para refuerzo de pilares en concreto con FRP, del modelo de Mander (1988), originariamente propuesto para confinamiento mediante estribos de acero.

$$f'_{ce} = f'_c \left( -1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94f'_l}{f'_c}} - 2 \frac{f'_l}{f'_c} \right) \quad \text{Ecuación 1-31}$$

Donde  $f'_l$  es la tensión lateral de confinamiento real:

$$f'_l = f_l k_e \quad \text{Ecuación 1-32}$$

Donde  $f_l$  es la tensión de confinamiento equivalente que se explica en:

$$f_l = \frac{2E_f \varepsilon_{clu} t_j}{D} \quad \text{Ecuación 1-33}$$

Con D diámetro equivalente de la sección rectangular

$$D = \frac{2bh}{b+h} \quad \text{Ecuación 1-34}$$

$$\gamma \quad \varepsilon_{clu} = 0.004 < 0.75 \varepsilon_{fum}$$

La deformación axial última del concreto confinado se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\varepsilon_{cu} = \frac{1.71(5f'_{cc} - 4f'_c)}{E_c},$$

Dónde:

$$E_c = 4730 \sqrt{f'_c}$$

## b) Modelo de Teng et. Al (2009)

Este es el último modelo presentado por Teng muestra los resultados de recientes estudios que han tratado de perfeccionar y refinar el diseño orientado a determinar el modelo tensión-deformación que originalmente presentaron Lam y Teng (2003, 2007) para concreto confinado con FRP. Se proponen expresiones más precisas para el cálculo de la deformación axial última y la resistencia a compresión.

Para comprender estas variables incorporadas al nuevo modelo se han explicado anteriormente algunas desventajas y/o carencias que tenían los anteriores modelos de 2003 y 2007 y que han intentado subsanarse.

En la que sigue se usan de 3 relaciones entre variables definidas como: la relación de confinamiento  $f_l / f'_{co}$ , relación de la rigidez de confinamiento  $\rho_k$ , y la relación de deformación  $\rho_\varepsilon$ . Las expresiones matemáticas de estas 3 relaciones son las siguientes:

$$\frac{f_l}{f'_{co}} = \frac{2E_{FRP}t\varepsilon_{h,rup}}{f'_{co}D} = \rho_k \rho_\varepsilon$$

Ecuación 1-35

$$\rho_k = \frac{2E_{FRP}t}{(f'_{co} / \varepsilon_{co})D}$$

Ecuación 1-36

$$\rho_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{h,rup}}{\varepsilon_{co}}$$

Ecuación 1-37

Dónde:

$f_l$ : Presión de confinamiento proveniente de la camisa de FRP cuando falla por ruptura debido a las tensiones circunferenciales a tracción.

$E_{FRP}$ : Módulo elástico de FRP en la dirección circunferencial.

t: Espesor de la camisa de FRP

$\varepsilon_{h,RUP}$ : Deformación circunferencial en rotura de la camisa de FRP

D: Diámetro del cilindro de concreto confinado. La relación de confinamiento  $f_l / f'_{co}$ : Relación de confinamiento.

$\rho_k$ : Rigidez de confinamiento del FRP relativa al núcleo de concreto.

$\rho_\varepsilon$ : Relación de deformación, o capacidad de deformación de la camisa FRP.

Continuando con la misma forma matemática que Richard. (1928), se puede escribir la expresión siguiente con las relaciones mencionadas.

$$\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} = C_\sigma + F_\sigma(\rho_k)f_\sigma(\rho_\varepsilon)$$

Ecuación 1-38

Dónde:

$F_{\sigma}(\rho_k)$  y  $f_{\sigma}(\rho_{\varepsilon})$ : Funciones de relación de la rigidez de confinamiento y de la relación de deformación, respectivamente.

$C_{\sigma}$ : Constante.

La ecuación de resistencia a compresión fue refinada en base experimental y analítica. Modelos experimentales de multitud de ensayos muestran que las curvas tenso – deformaciones exhiben una forma bilineal, con las dos partes suavemente conectadas por una zona de transición cercana a la resistencia no confinada del concreto. Tanto la forma de la primera como de la segunda parte son muy cercanas a una línea recta. Estas líneas rectas pueden representarse por:

$$\frac{\sigma_c}{f'_{co}} = 1 + K \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_{co}} \quad \text{Ecuación 1-39}$$

Lo que significa que la constante  $C_{\sigma}$  se toma la unidad por la razón expuesta más arriba. K = pendiente de la línea recta. Es obvio que la tensión axial  $\sigma_c$  alcanza  $f'_{cu}$  cuando  $\varepsilon_l = -\varepsilon_{h,rupt}$ , y entonces surge la siguiente ecuación:

$$\frac{f'_{cu}}{f'_{co}} = 1 - K \frac{\varepsilon_{h,rupt}}{\varepsilon_{co}} = 1 - K\rho_{\varepsilon} \quad \text{Ecuación 1-40}$$

Donde  $K = F_{\sigma}(\rho_k)$  se determina mediante estudio paramétrico y se encuentra que:

$$K = F_{\sigma}(\rho_k) = -3.2\rho_k^{0.9} + 0.06 \quad \text{Ecuación 1-41}$$

Y sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$\frac{f'_{cu}}{f'_{co}} = 1 + (3.2\rho_k^{0.9} + 0.06)\rho_{\varepsilon} \quad \text{Ecuación 1-42}$$

Al ser un inconveniente para su uso en el diseño por su no linealidad, se propuso una aproximación lineal, obteniendo la ecuación definitiva de Teng et al. (2009) para el cálculo de la resistencia a compresión del concreto confinado.

$$\frac{f'_{cu}}{f'_{co}} = 1 + 3.5(\rho_k - 0.01)\rho_{\varepsilon} \quad \text{Ecuación 1-43}$$

Debe apreciarse que la siguiente ecuación predice la tensión axial en la deformación axial última, pero no en la resistencia a compresión  $f'_{cc}$  de concreto confinado con FRP, aunque son las mismas a menos que la curva tensión-deformación tenga una rama descendiente (Lam y Teng, 2007). Por ello esta expresión queda dividida en:

$$\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} = 1 + 3.5(\rho_k - 0.01)\rho_\varepsilon, \text{ si } \rho_k \geq 0.01 \quad \text{Ecuación 1-44}$$

$$\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} = 1, \text{ si } \rho_k < 0.01 \quad \text{Ecuación 1-45}$$

## CAPITULO 6. RESULTADOS

### Caso 01: Columna con sección cuadrada de 0.30m x 0.30m y $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$

SIN FRP	
Momento (Ton/m)	Carga Axial (Ton)
-4.09	25.90
9.53	41.17
11.20	71.92
9.90	111.80
8.15	144.80
5.72	174.80
2.48	203.10
-1.65	230.40
-6.68	256.90
-27.45	333.80

Tabla 3: Columna con sección cuadrada de 0.30 x 0.30 y resistencia del concreto  $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$  SIN REFORZAMIENTO

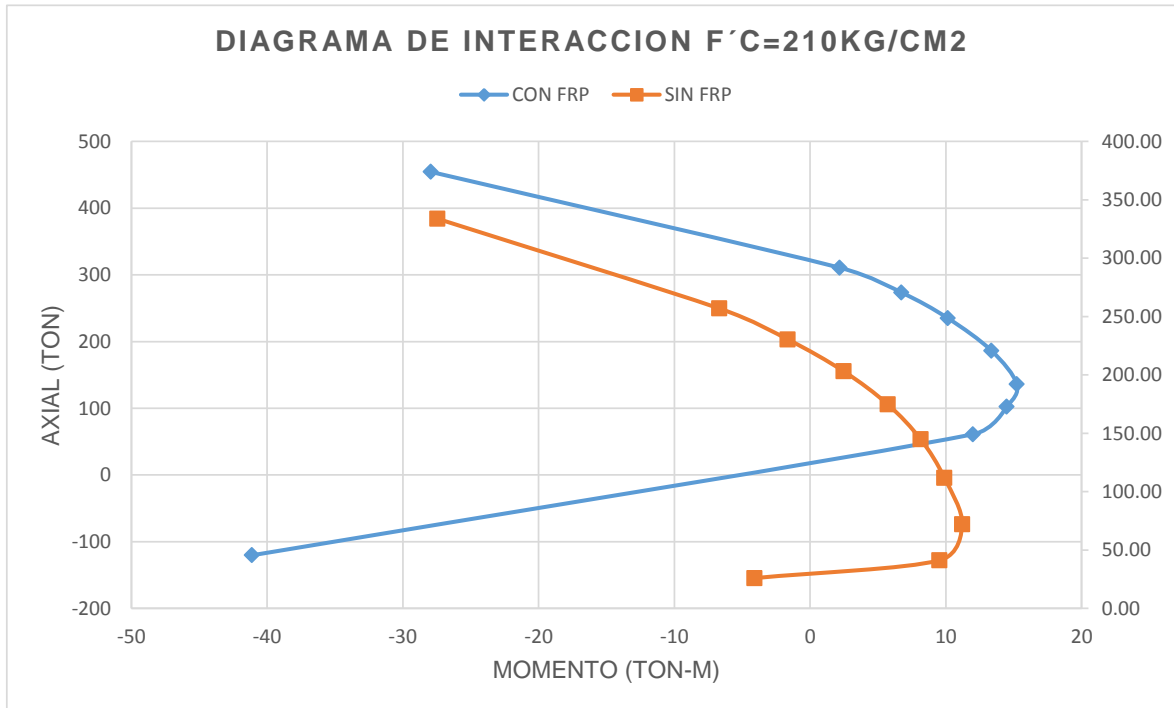
CON FRP	
Momento (Ton/m)	Carga Axial (Ton)
-41.11	-120.41
12.00	60.99
14.47	102.17
15.22	136.23
13.36	186.32
10.14	235.22
6.73	273.52
2.18	310.76
-27.94	454.41

Tabla 4: Columna con sección cuadrada de 0.30 x 0.30 y resistencia del concreto  $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$  CON REFORZAMIENTO

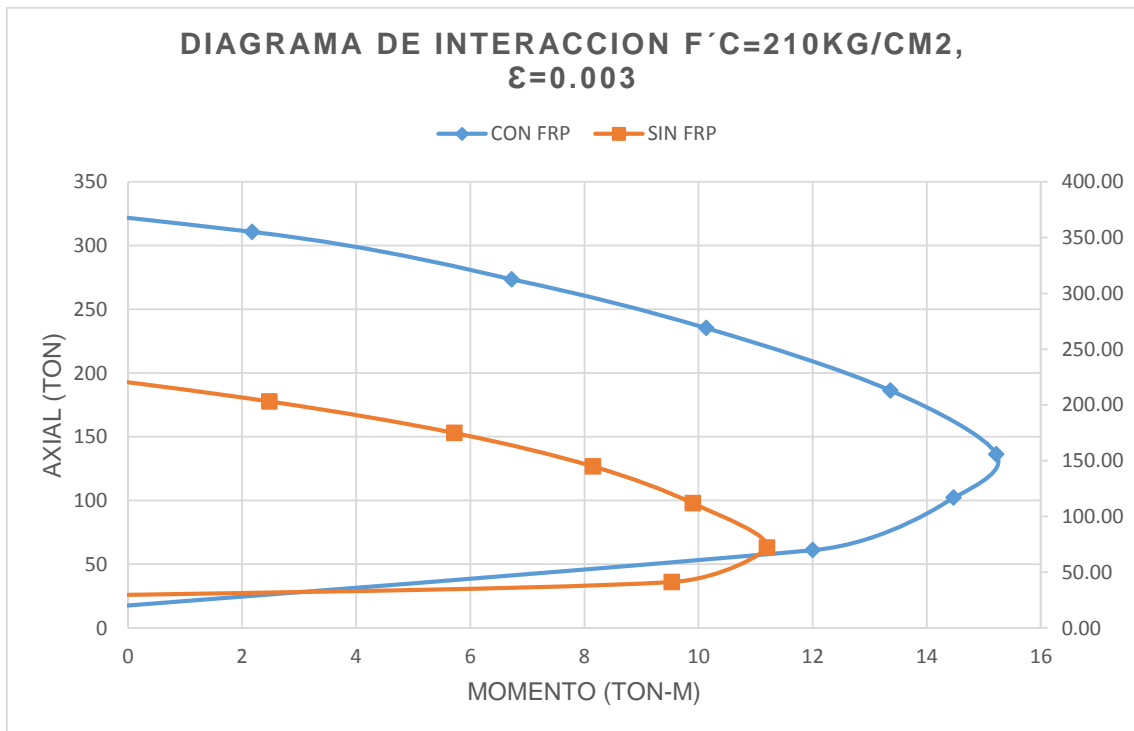
	% Incremento M	% Incremento P
0	90.05%	121.51%
1	20.59%	32.50%
2	22.61%	29.61%
3	34.97%	17.93%
4	38.99%	22.28%
5	43.57%	25.69%
6	63.18%	25.75%
7	175.48%	25.86%
8	76.09%	43.46%
9		
PROMEDIO % =	61.18%	37.64%

Tabla 5: Incremento para una columna de sección 0.30x0.30 con concreto  $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$





**Gráfico 14:** Diagrama completo de interacción para  $f'c \ 210 \text{ Kg/cm}^2$  cuya sección es  $0.3 \times 0.3$ , los puntos de la gráfica son los valores de la Tabla 3 y 4.



**Gráfico 15:** Diagrama de interacción en el en eje  $x=0$  e  $y=0$  para  $f'c \ 210 \text{ Kg/cm}^2$  cuya sección es  $0.30 \times 0.30$

### Porcentajes de incremento de fuerzas en una columna de sección 0.30 x 0.30

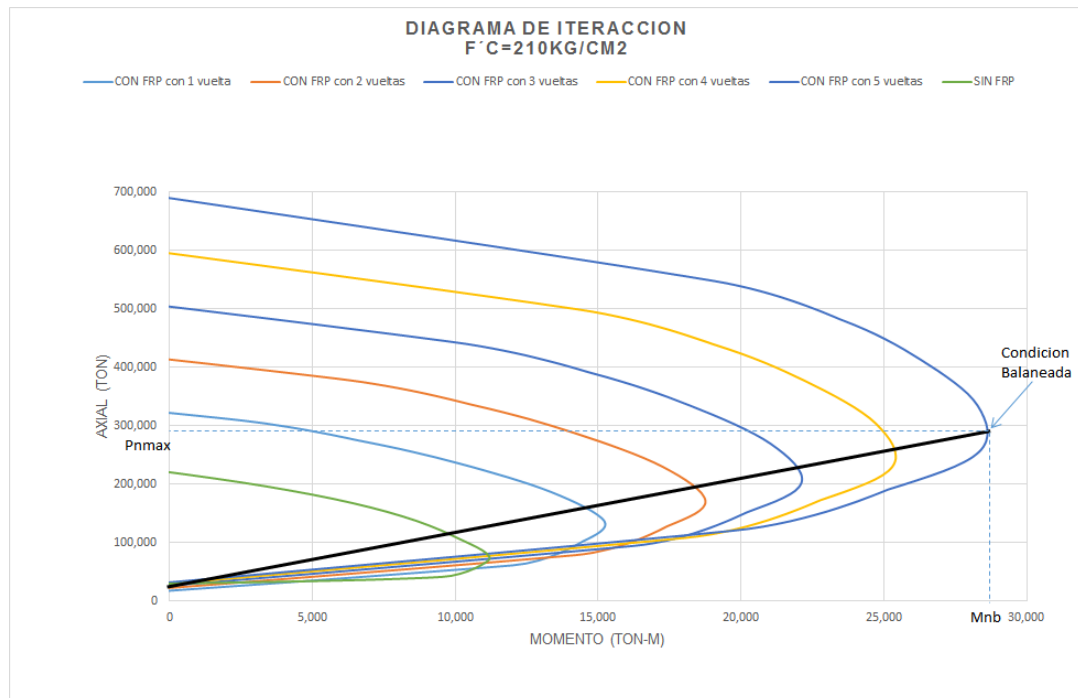
Esfuerzo máximo de compresión del concreto $f'c$	INCREMENTO	
	Momento (kg-m)	Axial (kg)
210 kg/cm <sup>2</sup>	61.18%	37.64%

Tabla 6: Porcentajes de incremento de fuerzas en una columna de sección cuadrada (0.30 x 0.30), valor promedio obtenido en la tabla 5

- En el caso de una columna cuadrada podemos observar que existe una mejora con la eficiencia de la fibra como refuerzo se observa mejoras en Carga Axial y Momento, también se ve que existe un decremento conforme la resistencia del concreto aumenta; esto indica que existe una mayor mejora a flexión si la resistencia a compresión del concreto es menor.
- La capacidad a carga axial se incrementa en un promedio de 61.18% y de momento es 37.64% para la columna de sección rectangular de sección 0.30x0.30m.
- La capacidad a flexión mejora de manera eficaz en ambas secciones de columnas, pero la mejora se ve que es más eficiente en una columna de sección cuadrada.

### Caso 02: Columna con sección rectangular de 0.30 x 0.30 y $f'c=210 \text{ kg/cm}^2$ , con diferentes espesores de reforzamiento de fibra de carbono.

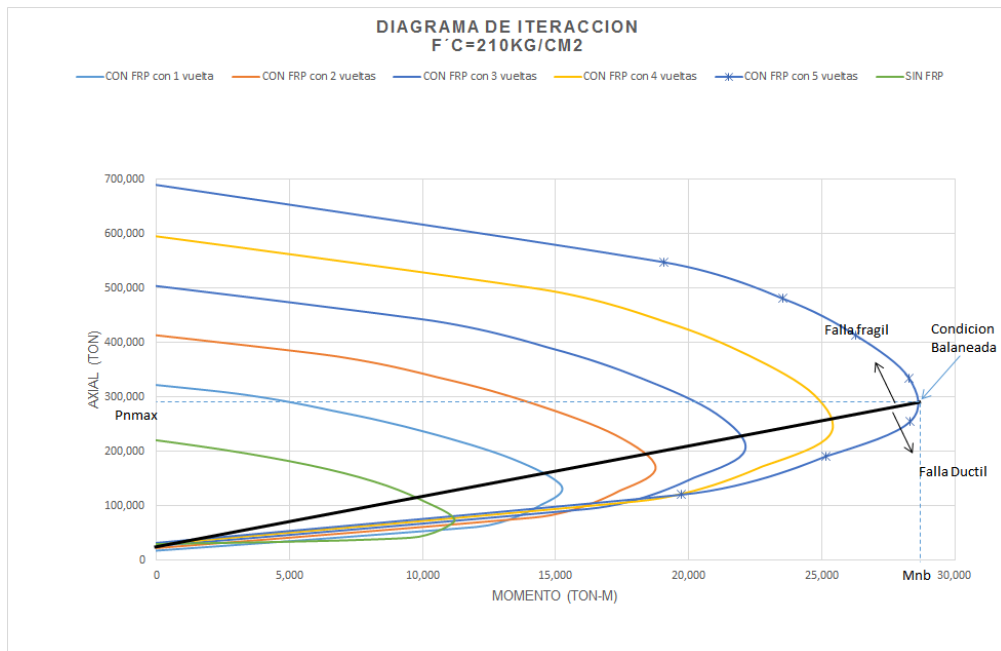
Se debe entender que para cada espesor de reforzamiento se tiene una deformación última, pero para poder comparar se presenta a continuación los diagramas de interacción para la deformación unitaria de  $\epsilon=0.003$



**Gráfico 16: Diagrama de interacción para diferentes espesores de reforzamiento mejora las resistencias (Axial y Momento) conforme aumenta el espesor de reforzamiento.**

De la gráfica que a flexión pura ( $y=0$ ) todas la graficas cortan por un mismo punto aproximado, esto quiere decir que para su resistencia a flexión pura (en este punto) solo aporta la resistencia la sección de concreto.

Se observa que sí mejora la capacidad axial de la columna.



**Gráfico 17: Diagrama de interacción con deformación última de FRP obtenida por cálculo (gráfica celeste) y diagrama de interacción con  $\epsilon=0.003$  (gráfica naranja)**

- La flexión y carga axial en columnas del concreto armado confinadas con polímeros reforzados con fibra de carbono (FRP) se incrementa aproximadamente en 61% y 38% respectivamente. Ver tabla 06.
- El sistema de reforzamiento con FRP produce un incremento de 30% en promedio cuando los elementos columna son confinados; sin embargo, se observa una mejora en concretos de baja resistencia a compresión.
- Se observa que a flexión pura de una determinada sección solo interesa la sección del concreto, el reforzamiento contribuye en el incremento de esta resistencia.
- En las columnas cuadradas reforzadas con fibra de carbono versus una columna rectangular se observa que el reforzamiento es mejor en secciones cuadradas.
- La capacidad a carga axial se incrementa en 38% en promedio aproximadamente en ambas secciones (columna cuadrada y rectangular).
- Para la construcción de las gráficas teóricas de comparación se debe asumir una deformación unitaria equivalente a  $\epsilon=0.003$ , pero debe entenderse que la deformación última de un elemento compuesto (concreto más fibra de carbono) es mucho mayor que esta deformación.
- La grafica teórica obtenida con la deformación última obtenida del reforzamiento (Sección de concreto más reforzamiento con fibra de carbono)

## PRINCIPALES PROCEDIMIENTOS PARA LA INSTALACION DE MANTAS FRP

En el mercado peruano están disponibles las mantas de fibras de carbono en distintos espesores, de acuerdo al requerimiento del diseño; en nuestro caso estamos analizando la manta de fibra de carbono HT-SIKA WRAP 600C cuyo espesor es de 0.337mm.

Antes de instalar el sistema FRP, se debe preparar la superficie a reforzar tratando grietas o cangrejas, imperfecciones y limpiando o arenando las barras de refuerzo si estas presentan óxido.

Es importante mencionar en esta parte que el sistema FRP no está diseñado para resistir grandes fuerzas expansivas generadas por la corrosión del refuerzo.

Luego de la adecuada preparación de la superficie del concreto, mencionada en los párrafos anteriores, el proceso de aplicación de un sistema FRP se puede resumir en las siguientes etapas:

- a. Ya preparada la superficie de concreto, se aplica una capa de imprimante epóxico usando un rodillo especial. Usualmente, este primer producto epóxico tiene una baja viscosidad permitiendo su penetración en el concreto. La función de esta primera capa es proveer a la superficie del concreto una adecuada adherencia.
- b. Acto seguido, se aplica una masilla o pasta epóxica para rellenar cualquier defecto en la superficie que pueda quedar mayor de  $\frac{1}{4}$ " de profundidad (Cualquier cangrejera o hueco profundo debe ser rellenado con mortero durante la preparación de la superficie de concreto, no en esta etapa).
- c. Luego, se cubre la superficie con un saturante epóxico para impregnar las fibras secas. Este saturante mantiene las fibras en su adecuada dirección y posición. El objetivo de esta capa de saturante es rápidamente empapar las fibras y mantenerlas en su ubicación mientras se inicia el proceso de curado del sistema de reforzamiento. Debido a su alta viscosidad, permite el fácil manejo de la fibra y su correcta aplicación. Este saturante también distribuye los esfuerzos en las fibras y ayuda a protegerlas de las condiciones ambientales y la abrasión.
- d. Se cortan y preparan a medida las mantas de fibras de carbono de acuerdo al diseño del proyecto y se colocan en su lugar, permitiendo que comience a absorber el saturante.
- e. Luego de un tiempo de espera determinado que permite a la lámina absorber la primera capa de saturante, se aplica una segunda capa de saturante para cubrirla.
- f. Finalmente, se aplica una capa de acabado que cubre totalmente el sistema FRP, logrando una apariencia similar a un concreto común. Esta capa también protege a la fibra de los rayos ultravioletas, ataques químicos, abrasión, severas condiciones climáticas, etc.

## CONCLUSIONES

Tras la aplicación de los procesos, es posible arribar a las siguientes conclusiones:

- a) La hipótesis general planteada es verdadera porque hay una mejora expresada en la flexión
  - De la curva de flexo compresión de una columna reforzada con fibra de carbono se puede obtener que el punto de flexión pura es el mismo para una sección sin y con reforzamiento, se observa que la Momento nominal resistente ( $M_{nb}$ ) se incrementa a medida que aumenta el reforzamiento (Ver grafica 16) al igual que la Carga Axial máxima ( $P_{nmax}$ )
  - De este análisis se puede obtener los puntos  $M_{nb}$  y el  $P_{nmax}$  como puntos de diseño para la sección reforzada con fibra de carbono, de la gráfica 17 se puede ver las zonas de Falla frágil y la zona de falla dúctil, de este análisis se podría plantear ábacos de diseño.
- b) Con respecto a las hipótesis planteadas:
  - En nuestro país no hay literatura disponible, hay en otras regiones la metodología de diseño según normativa norteamericana o la normativa alemana, se optó la normativa alemana porque esta contempla el aporte de los estribos en la resistencia de la sección.
  - Mediante la gráfica 17, donde a medida que se incrementa el espesor del reforzamiento esta nueva curva envuelve a la curva con un reforzamiento menor, de este grafica se puede concluir que a medida que se incrementa el espesor de reforzamiento se incrementa el Momento nominal resisten y la Carga axial máxima.
  - Se observó que la sección reforzada aumenta su deformación hasta un punto máximo al alcanzar este punto se concluye que la rotura debe ser frágil o repentina, por esto debe fijarse limites en la deformación axial al momento de diseñar este tipo de sección.

## RECOMENDACIONES

- Establecer límites para el diseño o deformaciones máximas a fin de que la sección concreto - fibra de carbono no llegue a su estado máximo de deformación unitaria y se produzca una falla frágil
- El diseño del refuerzo debe analizarse bajo teoría y ensayos de Liam y Teng; no debe considerarse el diseño con la teoría de Mander ya que esta teoría fue hecha para un concreto reforzado con estribos.
- La efectividad del sistema en columnas confinadas con FRP es mejor en secciones cuadradas que en secciones rectangulares, deberán hacerse ensayos para la verificación de esta hipótesis.
- El manejo adecuado de los tiempos de espera entre una y otra capa, los espesores exactos de las capas, y la presión de aplicación son factores determinantes en la resistencia final del sistema, por lo que no se recomienda su aplicación en manos inexpertas.
- Tampoco es recomendable aplicar este reforzamiento a estructuras de concreto armado que hayan sido sometidas a fuego.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aire Untiveros, C. (2002). *Estudio Experimental del Comportamiento del Hormigón Confinado Sometido a Compresión*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.
- ARQHYS. (Junio de 2017). *Flexión Simple*. Obtenido de <http://www.arqhys.com/construccion/simple-flexion.html>
- Beltran Riveros, A. A. (2011). *Uso de fibras de carbono como reforzamiento a flexión en vigas de concreto reforzado*. Bogotá D.C.: Universidad de la Salle - Facultad de Ingeniería.
- Cabrera, J. (15 de 12 de 2012). *Civilgeeks.com*. Obtenido de <http://civilgeeks.com/2012/12/15/6-principales-causas-fallas-edificaciones-sometidas-acciones-sismicas/>
- Cavette, C. (22 de Julio de 2012). *How Products Are Made*. Obtenido de <http://www.madehow.com/Volume-4/Carbon-Fiber.html>
- Ciencia y tecnología. (22 de Septiembre de 2013). *Curiosoando*. Obtenido de <https://curiosoando.com/que-es-una-fuerza-axial>
- Flores Colín, N. E., & Gallegos Arzate, E. (29 de Noviembre de 2010). *Slideshare*. Obtenido de <https://es.slideshare.net/joseeduard/flexion>
- Gómez, M. D., & Sobrino, J. A. (2005). Criterios de diseño para refuerzo de estructuras con materiales compuestos con fibra de carbono. *Universidad de los Andes*.
- Hibbeler, R. (s.f.). *Mecánica de Materiales*. ED. Prentice Hall.
- Instituto de la Construcción y Gerencia. (2014). *Manual de la Construcción* (2014 ed.). Lima: Instituto de la Construcción y Gerencia - ICG.
- La Republica. (28 de Abril de 2015). Autoconstrucción, el mayor problema ante los sismos. Obtenido de <http://larepublica.pe/28-04-2015/autoconstruccion-el-mayor-problema-ante-los-sismos>
- Murali G., & Pannirselvam N. (Noviembre de 2011). Flexural strengthening of reinforced concrete beams using fibre reinforced polymer laminate: a review. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 6(11), 41-47.
- Murillo Jiménez, C. G. (2004). *Análisis de las causas que dieron origen a los daños estructurales, en las edificaciones del Estado de Puebla, provocados por el sismo del 15 de junio de 1999*. Cholula, Puebla: Universidad de las Américas Puebla. Obtenido de [http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lic/murillo\\_j\\_cg/](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lic/murillo_j_cg/)
- Nash, W. (s.f.). *Resistencia de Materiales*. Mc Wraw Hill.
- Rincón, J. C. (s.f.). *Estructuras EIA*. Obtenido de <http://estructuras.eia.edu.co/hormigon/COLUMNAS/flexocompresion/flexocompresion.htm>
- Rosero Landeta, L. F. (2013). *Reforzamiento de estructuras de hormigón armado con FRP aplicación al caso de refuerzo de una losa y columnas de un salón de audiovisuales y un auditorio*. Sangolquí: Escuela Politécnica del Ejército.
- Salazar, T. J. (2007). *Resistencia de Materiales Básica para Estudiantes de Ingeniería*. Manizales, Caldas, Colombia: Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.
- San Bartolomé, Á. (2010). *El problema de "Piso Blando"*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Obtenido de <http://blog.pucp.edu.pe/blog/wp-content/uploads/sites/82/2010/07/Piso-Blando.pdf>
- Tavera, H. (8 de Mayo de 2012). El pánico y las edificaciones mal construidas son los que matan durante sismos. (A. Andina, Entrevistador) Obtenido de <http://www.andina.com.pe/agencia/noticia-el-panico-y-las-edificaciones-mal-construidas-son-los-matan-durante-sismos-411375.aspx>
- Zavala, C. (13 de Mayo de 2016). Más del 60% de viviendas de Lima necesita reforzamiento para no colapsar ante terremoto. (A. Andina, Entrevistador) Obtenido de <http://www.andina.com.pe/agencia/noticia-mas-del-60-viviendas-lima-necesita-reforzamiento-para-no-colapsar-ante-terremoto-555938.aspx>



## ANEXO N.º 1. Hoja técnica de SIKAWRAP 600C

## ANEXO N. ° 2. Cálculos para hallar la capacidad flexo – compresión

## Anexo 2-0-1: Diagrama de interacción carga axial - momento de una sección 0.30 x 0.30 de concreto armado f'c =210 kg/cm<sup>2</sup> SIN Reforzamiento de fibra de carbono

Características para una sección cuadrada:

$$b := 30 \cdot \text{cm}$$

$$h := 30 \cdot \text{cm}$$

**CONCRETO f'c=210 kg/cm<sup>2</sup>**

Esfuerzo máximo del concreto:

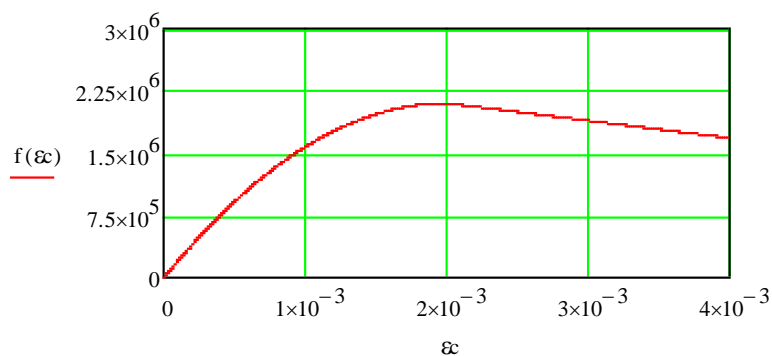
$$f_{2c} := 210 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Deformación correspondiente al esfuerzo máximo:

$$\epsilon_0 := 0.002$$

La función de esfuerzo en el concreto está dada por:

$$f(\epsilon_c) := \begin{cases} f_{2c} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right] & \text{if } \epsilon_c \leq 0.002 \\ f_{2c} \cdot [1 - 100 \cdot (\epsilon_c - \epsilon_0)] & \text{if } \epsilon_c > .002 \end{cases}$$



**Gráfico 18: Curva supuesta esfuerzo - deformación del concreto f'210**

## ACERO

Esfuerzo de fluencia para el acero:

$$f_y := 4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

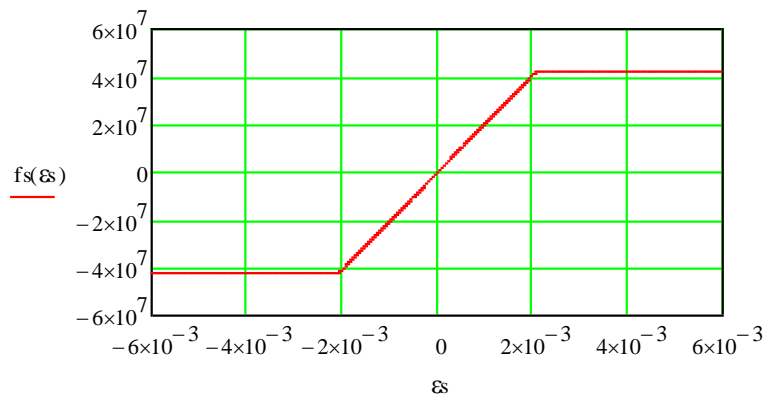
Módulo de elasticidad el acero:

$$E_s := 29000000 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

La deformación en la fluencia es:

$$\epsilon_{so} := \frac{f_y}{E_s} \quad \epsilon_{so} = 2.06 \times 10^{-3}$$

$$f_s(\epsilon_s) := \begin{cases} -f_y & \text{if } \epsilon_s < -\epsilon_{so} \\ E_s \cdot \epsilon_s & \text{if } -\epsilon_{so} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{so} \\ f_y & \text{if } \epsilon_s > \epsilon_{so} \end{cases}$$



**Gráfico 19: Curva supuesta esfuerzo - deformación del acero.**

$$\alpha(\epsilon_c) := \begin{cases} \left(\frac{10^3}{6}\right) \cdot (3 \cdot \epsilon_c - 500 \cdot \epsilon_c^2) & \text{if } \epsilon_c \leq .002 \\ \frac{-26}{3 \cdot 10000 \cdot \epsilon_c} - 50 \cdot \epsilon_c + \frac{12}{10} & \text{if } \epsilon_c > 0.0 \end{cases}$$

$$\gamma(\epsilon_c) := \begin{cases} \frac{(2 - 250 \cdot \epsilon_c)}{2 \cdot (3 - 500 \cdot \epsilon_c)} & \text{if } \epsilon_c \leq .002 \\ 1 - \frac{\left[\left(\frac{-56}{12 \cdot 10^7}\right) + \left(\frac{6}{10}\right) \cdot \epsilon_c^2 - \frac{100}{3} \cdot \epsilon_c^3\right]}{\epsilon_c \cdot \left[\left(\frac{-26}{3 \cdot 10^4}\right) + \left(\frac{12}{10}\right) \cdot \epsilon_c - 50 \cdot \epsilon_c^2\right]} & \text{if } \epsilon_c > \end{cases}$$

### Varillas de acero:

$$A_s := \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 2.54 \cdot \text{cm}\right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 2.54 \cdot \text{cm}\right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 2.54 \cdot \text{cm}\right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 2.54 \cdot \text{cm}\right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 2.54 \cdot \text{cm}\right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{8}\right) \cdot 2.54 \cdot \text{cm}\right]^2 \end{bmatrix} \quad d := \begin{bmatrix} 5 \cdot \text{cm} \\ 5 \cdot \text{cm} \\ 5 \cdot \text{cm} \\ 25 \cdot \text{cm} \\ 25 \cdot \text{cm} \\ 25 \cdot \text{cm} \end{bmatrix}$$

Nota: en las páginas siguientes, las fuerzas (-) son de tracción y las (+) son de compresión

**ITERACION 0:**      kd := -5 · cm      εcu := 0.003

$$\varepsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{si} = \begin{pmatrix} 6 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-3} \\ 0.018 \\ 0.018 \\ 0.018 \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\varepsilon_{si_0}) \\ f_s(\varepsilon_{si_1}) \\ f_s(\varepsilon_{si_2}) \\ f_s(\varepsilon_{si_3}) \\ f_s(\varepsilon_{si_4}) \\ f_s(\varepsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial  
:

$$P_0 := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_0 = 2.59 \times 10^4 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_0 := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\varepsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_0 = -4.089 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

**ITERACION 1:**

$kd := 10 \cdot \text{cm}$

$\epsilon_{cu} := 0.003$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 1.5 \times 10^{-3} \\ 1.5 \times 10^{-3} \\ 1.5 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 3.058 \times 10^7 \\ 3.058 \times 10^7 \\ 3.058 \times 10^7 \\ -4.2 \times 10^7 \\ -4.2 \times 10^7 \\ -4.2 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_1 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_1 = 4.117 \times 10^4 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_1 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_1 = 9.531 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

ITERACION 2:  $kd := 15 \cdot \text{cm}$   $\epsilon_{cu} := 0.003$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.078 \times 10^7 \\ 4.078 \times 10^7 \\ 4.078 \times 10^7 \\ -4.078 \times 10^7 \\ -4.078 \times 10^7 \\ -4.078 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_2 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_2 = 7.192 \times 10^4 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_2 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_2 = 1.12 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{kg}$$



ITERACION 3:  $\underset{\text{AAAA}}{kd} := 20\text{-cm}$        $\underset{\text{AAAA}}{\epsilon_{cu}} := 0.00\epsilon$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{pmatrix} 2.25 \times 10^{-3} \\ 2.25 \times 10^{-3} \\ 2.25 \times 10^{-3} \\ -7.5 \times 10^{-4} \\ -7.5 \times 10^{-4} \\ -7.5 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ -1.529 \times 10^7 \\ -1.529 \times 10^7 \\ -1.529 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_3 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_3 = 1.118 \times 10^5 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_3 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right]$$

$$M_3 = 9.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

ITERACION 4:  $\underset{\text{AAAAA}}{kd} := 25 \text{ cm}$        $\underset{\text{AAAAAAA}}{\varepsilon_{cm}} := \varepsilon_{cu}$

$$\varepsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{si} = \begin{pmatrix} 2.4 \times 10^{-3} \\ 2.4 \times 10^{-3} \\ 2.4 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\varepsilon_{si_0}) \\ f_s(\varepsilon_{si_1}) \\ f_s(\varepsilon_{si_2}) \\ f_s(\varepsilon_{si_3}) \\ f_s(\varepsilon_{si_4}) \\ f_s(\varepsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_4 := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si_i} \cdot A_{s_i}) \quad P_4 = 1.448 \times 10^5 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_4 := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\varepsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si_i} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_4 = 8.152 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

**ITERACION 5:**  $\epsilon_{cu} := 30 \cdot \text{cm}$   $\epsilon_{cu} := 0.003$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^{-3} \\ 2.5 \times 10^{-3} \\ 2.5 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 5 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 1.019 \times 10^7 \\ 1.019 \times 10^7 \\ 1.019 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_5 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_5 = 1.748 \times 10^5 \text{kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_5 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_5 = 5.721 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{kg}$$

**ITERACION 6:**  $\underset{\text{AAAA}}{kd} := 35 \cdot \text{cm}$        $\underset{\text{AAAA}}{\varepsilon_{cu}} := 0.003$

$$\varepsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{si} = \begin{pmatrix} 2.571 \times 10^{-3} \\ 2.571 \times 10^{-3} \\ 2.571 \times 10^{-3} \\ 8.571 \times 10^{-4} \\ 8.571 \times 10^{-4} \\ 8.571 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\varepsilon_{si_0}) \\ f_s(\varepsilon_{si_1}) \\ f_s(\varepsilon_{si_2}) \\ f_s(\varepsilon_{si_3}) \\ f_s(\varepsilon_{si_4}) \\ f_s(\varepsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 1.748 \times 10^7 \\ 1.748 \times 10^7 \\ 1.748 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_6 := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si_i} \cdot A_{s_i}) \quad P_6 = 2.031 \times 10^5 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_6 := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\varepsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si_i} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_6 = 2.477 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

**ITERACION 7:**  $\underset{\text{AAAA}}{k_d} := 40 \cdot \text{cm}$        $\underset{\text{AAAA}}{\epsilon_{cu}} := 0.003$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k_d - d_0)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k_d - d_1)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k_d - d_2)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k_d - d_3)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k_d - d_4)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cu} \cdot (k_d - d_5)}{k_d} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.625 \times 10^{-3} \\ 2.625 \times 10^{-3} \\ 2.625 \times 10^{-3} \\ 1.125 \times 10^{-3} \\ 1.125 \times 10^{-3} \\ 1.125 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 2.294 \times 10^7 \\ 2.294 \times 10^7 \\ 2.294 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_7 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot k_d + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_7 = 2.304 \times 10^5 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_7 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot k_d \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cu}) \cdot k_d \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_7 = -1.645 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

**ITERACION 8:**  $kd := 45 \cdot \text{cm}$   $\epsilon_{cu} := 0.003$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cu} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.667 \times 10^{-3} \\ 2.667 \times 10^{-3} \\ 2.667 \times 10^{-3} \\ 1.333 \times 10^{-3} \\ 1.333 \times 10^{-3} \\ 1.333 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 2.719 \times 10^7 \\ 2.719 \times 10^7 \\ 2.719 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_8 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_2c \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_8 = 2.569 \times 10^5 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_8 := \alpha(\epsilon_{cu}) \cdot f_2c \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_8 = -6.68 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

**ITERACION 9:**  $\underset{\text{AAAA}}{kd} := 60 \cdot \text{cm}$        $\underset{\text{AAAAA}}{\varepsilon_{cu}} := 0.003$

$$\varepsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.75 \times 10^{-3} \\ 2.75 \times 10^{-3} \\ 2.75 \times 10^{-3} \\ 1.75 \times 10^{-3} \\ 1.75 \times 10^{-3} \\ 1.75 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\varepsilon_{si_0}) \\ f_s(\varepsilon_{si_1}) \\ f_s(\varepsilon_{si_2}) \\ f_s(\varepsilon_{si_3}) \\ f_s(\varepsilon_{si_4}) \\ f_s(\varepsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 3.568 \times 10^7 \\ 3.568 \times 10^7 \\ 3.568 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{m}^{-2} \cdot \text{kg}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_g := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si_i} \cdot A_{s_i}) \quad P_g = 3.338 \times 10^5 \text{ kg}$$

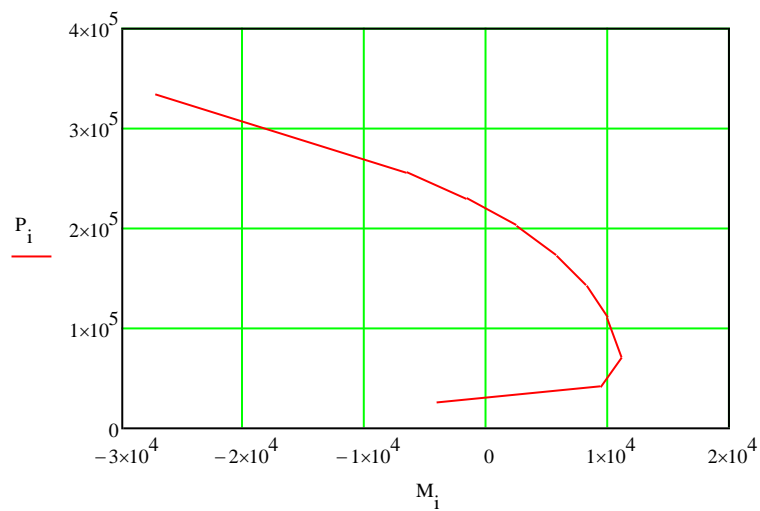
El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_g := \alpha(\varepsilon_{cu}) \cdot f_{2c} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\varepsilon_{cu}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si_i} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_g = -2.745 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

Finalmente resumiendo para la sección:

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  y  $9$

	0		0	
0	$2.59 \cdot 10^4$		$-4.089 \cdot 10^3$	
1	$4.117 \cdot 10^4$		$9.531 \cdot 10^3$	
2	$7.192 \cdot 10^4$		$1.12 \cdot 10^4$	
3	$1.118 \cdot 10^5$		$9.9 \cdot 10^3$	
4	$1.448 \cdot 10^5$	kg	$8.152 \cdot 10^3$	m·kg
5	$1.748 \cdot 10^5$		$5.721 \cdot 10^3$	
6	$2.031 \cdot 10^5$		$2.477 \cdot 10^3$	
7	$2.304 \cdot 10^5$		$-1.645 \cdot 10^3$	
8	$2.569 \cdot 10^5$		$-6.68 \cdot 10^3$	
9	$3.338 \cdot 10^5$		$-2.745 \cdot 10^4$	



**Gráfico 20: Diagrama de interacción carga axial - momento de una sección 0.30 x 0.30 de concreto armado  $f'c$  210 SIN FRP**



## Anexo 2-0-2: Diagrama de interacción carga axial - momento de una sección 0.30 x 0.30 de concreto armado f'c 210 CON FRP

Características para una sección cuadrada:

$$b := 30 \cdot \text{cm} \quad h := 30 \cdot \text{cm} \quad A_g := 6.1.99\text{cm}^2$$

Acero

$$f_{yk} := 42 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad E_s := 200 \frac{100\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

La deformación en la fluencia es:

$$\epsilon_{so} := \frac{f_{yk}}{E_s} \quad \epsilon_{so} = 2.1 \times 10^{-3}$$

$$f_s(\epsilon) := \begin{cases} -f_{yk} & \text{if } \epsilon < -\epsilon_{so} \\ E_s \cdot \epsilon & \text{if } -\epsilon_{so} \leq \epsilon \leq \epsilon_{so} \\ f_{yk} & \text{if } \epsilon > \epsilon_{so} \end{cases}$$

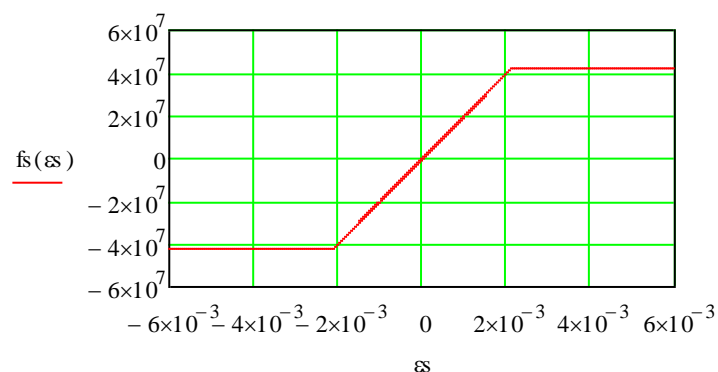


Gráfico 21: Curva supuesta esfuerzo - deformación del acero.

## Materiales de construcción:

### Concreto

$$f_{cm} := 2.10 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad E_{cm} := 15000 \sqrt{210} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad f_{ck} := 1.5 \sqrt{2.10} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad f_{ck} = 2.174 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

### Acero

$$f_{syk} := 42 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad E_s := 200 \frac{100\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

### Sistema de Reforzamiento:

Externamente el reforzamiento con CF, resistencia a la tracción  $f_{uk}$  y módulo de elasticidad  $E_l$ , se utilizara para el reforzamiento, este resultado en la siguiente deformación última:

$$\epsilon_{lk} := \frac{3500}{230} \quad \epsilon_{lk} = 15.217 \quad E_l := 240000 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

Espesor de la fibra de Reforzamiento:

$$t_l := 0.337 \text{mm}$$

$$\begin{aligned} k_0 &:= 0.2 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_1 &:= 2 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_2 &:= 0.25 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_3 &:= 0.7 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_4 &:= 1 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} \\ k_5 &:= 1 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_6 &:= 0.75 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_7 &:= 0.39 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_8 &:= 0.89 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}} & k_9 &:= \frac{0.44 \frac{\text{mm}^2}{\text{kg}}}{100} \\ \alpha_f &:= k_4 & \alpha_z &:= k_6 & \alpha_r &:= 0.24 & v &:= 0.2 \\ \alpha_e &:= k_5 & \alpha_k &:= 1.5 & \alpha_t &:= k_2 \end{aligned}$$

$$\beta_{fcm} := \frac{16.8}{\sqrt{\frac{\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}}}} \quad \sigma_{cp} := 0.45 f_{cm}$$

$$\epsilon_{cc \Delta t} := k_7 \cdot \beta_{fcm} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\sigma_{cp}}{E_{cm}} \quad \epsilon_{cc \Delta t} = 1.966 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_{juk} := \left( \alpha_r \cdot \alpha_t \cdot \alpha_f \cdot \alpha_e \cdot \alpha_z \cdot \epsilon_{lk} \cdot \frac{\text{kg}^4}{\text{mm}^8} - \alpha_k \cdot v \cdot \epsilon_{cc} \Delta t \cdot 10^3 \right) \cdot \frac{1}{1000}$$

$$\epsilon_{juk} = 1.4076 \times 10^{-3}$$

$$D := \sqrt{b^2 + h^2} \quad D = 42.426 \text{ cm} \quad c_{xx} := 20 \text{ mm}$$

$$a_{sw} := \frac{0}{100} \text{ cm} \quad t_{weff} := \frac{a_{sw}}{2} \quad t_{weff} = 0 \text{ mm}$$

$$D_c := D - 2 \cdot c - 2 \cdot t_{weff}$$

$$\rho_{wy} := 2 \cdot \frac{t_{weff}}{D_c} \quad s_w := 150 \text{ mm}$$

$$E_{jl} := \frac{2 \cdot E_l \cdot t_l}{D} \quad E_{jl} = 3.813 \times 10^4 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$p_1 := E_{jl} \cdot \epsilon_{juk} \quad p_1 = 53.668 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$p_2 := \frac{2 \cdot (E_l \cdot t_l \cdot \epsilon_{juk} + t_{weff} \cdot f_{syk}) - p_1 \cdot c}{D_c + c} \quad p_2 = 53.668 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\Delta p := p_1 - \frac{2 \cdot E_l \cdot t_l \cdot \epsilon_{juk} - c \cdot (p_1 + p_2)}{D_c} \quad \Delta p = 1.164 \times 10^{-14} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\rho_g := \frac{b \cdot h}{A_g}$$

$$AA := \frac{1 - \frac{\frac{b}{h} \cdot (h - 2 \cdot c)^2 + \frac{h}{b} \cdot (b - 2 \cdot c)^2}{3 \cdot A_g}}{1 - \rho_g}$$

$$k_b := AA \cdot \left( \frac{h}{b} \right)^{0.5} \quad k_a := AA \cdot \left( \frac{b}{h} \right)^2$$

$$k_b = 1.507$$

$$k_a = 1.507$$

$$\epsilon_{cu} := 0.002 \left( 1.75 + 19 \cdot \frac{E_{jl} \cdot \epsilon_{juk}}{f_{cm}} \right)$$

$$f_c := f_{ck} + k_b \cdot 2 \cdot (\rho_w y \cdot f_{syk} - \Delta p) \cdot \left( \frac{D_c - \frac{sw}{2}}{D} \right)^2 \quad f_c = 217.371 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \epsilon_{cu} := 0.002$$

$$f_{ck} := f_{ck} + k_b \cdot 2 \cdot \left[ E_{jl} \cdot \epsilon_{juk} + (\rho_w y \cdot f_{syk} - \Delta p) \cdot \left( \frac{D_c - \frac{sw}{2}}{D} \right)^2 \right] \quad f_{ck} = 379.177 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$E_2 := \frac{f_{ck} - f_c}{\epsilon_{cu}} \quad E_2 = 5.394 \times 10^4 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \epsilon_0 := 0.001$$

$$E(\epsilon) := \left[ E_{cm} \cdot \epsilon - \frac{(E_{cm} - E_2)^2 \cdot \epsilon^2}{4 \cdot f_c} \right]$$

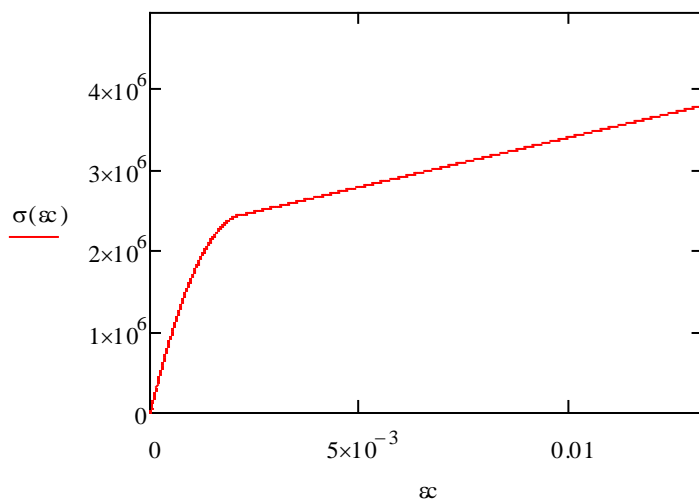
$$Z(\epsilon) := E_2 \cdot \epsilon + f_c$$

$$E(\epsilon_0) = 311.859 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$Z(\epsilon_0) = 325.241 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$E(\epsilon_0) - Z(\epsilon_0) = -13.383 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma(\epsilon) := \begin{cases} E_{cm} \cdot \epsilon - \frac{(E_{cm} - E_2)^2 \cdot \epsilon^2}{4 \cdot f_c} & \text{if } \epsilon \leq \epsilon_0 \\ E_2 \cdot \epsilon + f_c & \text{if } \epsilon_0 < \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$$



$$\sigma(0.002) = 241.1756 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma(\epsilon_{cu}) = 379.1766 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

### Para el concreto Confinado:

Cálculo del valor "α" del esfuerzo medio y del valor "Y" del centroide para cualquier deformación "ε<sub>cm</sub>" en la fibra extrema en compresión:

1) De las integrales generales para cualquier magnitud de ε<sub>cm</sub>:

$$\alpha(\epsilon_{cm}) := \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} \sigma(\epsilon) d\epsilon}{f_{ck} \cdot \epsilon_{cm}}$$

$$\gamma(\epsilon_{cm}) := 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} \epsilon \cdot \sigma(\epsilon) d\epsilon}{\epsilon_{cm} \cdot \int_0^{\epsilon_{cm}} \sigma(\epsilon) d\epsilon}$$

### Varillas de acero:

$$A_s := \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \cdot 2.54 \text{ cm} \right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \cdot 2.54 \text{ cm} \right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \cdot 2.54 \text{ cm} \right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \cdot 2.54 \text{ cm} \right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \cdot 2.54 \text{ cm} \right]^2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \left( \frac{5}{8} \right) \cdot 2.54 \text{ cm} \right]^2 \end{bmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} 5 \cdot \text{cm} \\ 5 \cdot \text{cm} \\ 5 \cdot \text{cm} \\ 25 \cdot \text{cm} \\ 25 \cdot \text{cm} \\ 25 \cdot \text{cm} \end{pmatrix}$$

El ejemplo para una columna con 10ton de carga axial

Nota: en las páginas siguientes, las fuerzas (-) son de tracción y las (+) son de compresión.

ITERACION 0:  $k_d := -25 \text{ cm}$      $\epsilon_{cm} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cm} \cdot (k_d - d_0)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (k_d - d_1)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (k_d - d_2)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (k_d - d_3)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (k_d - d_4)}{k_d} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (k_d - d_5)}{k_d} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 3.6 \times 10^{-3} \\ 3.6 \times 10^{-3} \\ 3.6 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si}_0) \\ f_s(\epsilon_{si}_1) \\ f_s(\epsilon_{si}_2) \\ f_s(\epsilon_{si}_3) \\ f_s(\epsilon_{si}_4) \\ f_s(\epsilon_{si}_5) \end{bmatrix}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_0 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot k_d + \sum_{i=0}^5 (f_{si}_i \cdot A_{s_i}) \quad P_0 = -120406 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_0 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot k_d \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot k_d \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si}_i \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_0 = -41108.072 \text{ m.kg}$$

La curvatura asociada es:  $\psi_0 := \frac{\epsilon_{cm}}{k_d}$      $\psi_0 = -0.012 \text{ m}^{-1}$

ITERACION 1:  $k_d := 10 \text{ cm}$        $\epsilon_{cm} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{pmatrix} 1.5 \times 10^{-3} \\ 1.5 \times 10^{-3} \\ 1.5 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-3} \\ -4.5 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 3 \times 10^7 \\ 3 \times 10^7 \\ 3 \times 10^7 \\ -4.2 \times 10^7 \\ -4.2 \times 10^7 \\ -4.2 \times 10^7 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_1 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_1 = 60989 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_1 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_1 = 12002.024 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

La curvatura asociada es:

$$\psi_1 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_1 = 0.03 \text{ m}^{-1}$$

ITERACION 2:  $\underset{\text{AAAAA}}{kd} := 15\text{-cm}$      $\underset{\text{AAAAAAA}}{\varepsilon_{cm}} := \varepsilon_{cu}$

$$\varepsilon_{si} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \varepsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \varepsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \varepsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \varepsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \varepsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{si} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\varepsilon_{si_0}) \\ f_s(\varepsilon_{si_1}) \\ f_s(\varepsilon_{si_2}) \\ f_s(\varepsilon_{si_3}) \\ f_s(\varepsilon_{si_4}) \\ f_s(\varepsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^7 \\ 4 \times 10^7 \\ 4 \times 10^7 \\ -4 \times 10^7 \\ -4 \times 10^7 \\ -4 \times 10^7 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_2 := \alpha(\varepsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si_i} \cdot A_{s_i}) \quad P_2 = 102171 \text{kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_2 := \alpha(\varepsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\varepsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si_i} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_2 = 1.447 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

La curvatura asociada es:

$$\psi_2 := \frac{\varepsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_2 = 0.02 \text{m}^{-1}$$



ITERACION 3:  $\underline{\underline{kd}} := 20\text{cm}$        $\underline{\underline{\epsilon_{cm}}} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_0)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_1)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_2)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_3)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_4)}{kd} \\ \frac{\epsilon_{cm} \cdot (kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \\ -2 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4 \times 10^7 \\ 4 \times 10^7 \\ 4 \times 10^7 \\ -4 \times 10^7 \\ -4 \times 10^7 \\ -4 \times 10^7 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_3 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si_i} \cdot A_{s_i}) \quad P_3 = 136228\text{kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_3 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si_i} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_3 = 1.522 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

La curvatura asociada es:

$$\psi_3 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_3 = 0.015\text{m}^{-1}$$

ITERACION 4:  $k_d := 25 \text{ cm}$   $\epsilon_{cm} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.25 \times 10^{-3} \\ 2.25 \times 10^{-3} \\ 2.25 \times 10^{-3} \\ -7.5 \times 10^{-4} \\ -7.5 \times 10^{-4} \\ -7.5 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ -1.5 \times 10^7 \\ -1.5 \times 10^7 \\ -1.5 \times 10^7 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_4 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_4 = 186318 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_4 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_4 = 1.336 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

La curvatura asociada es:

$$\psi_4 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_4 = 0.012 \text{ m}^{-1}$$

ITERACION 5:  $\epsilon_{cm} := 30 \cdot \epsilon_u$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^{-3} \\ 2.5 \times 10^{-3} \\ 2.5 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 5 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\epsilon_{si}_0) \\ f_s(\epsilon_{si}_1) \\ f_s(\epsilon_{si}_2) \\ f_s(\epsilon_{si}_3) \\ f_s(\epsilon_{si}_4) \\ f_s(\epsilon_{si}_5) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 1 \times 10^7 \\ 1 \times 10^7 \\ 1 \times 10^7 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_5 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si}_i \cdot A_{s_i}) \quad P_5 = 235220 \text{kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_5 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si}_i \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_5 = 1.014 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

La curvatura asociada es:

$$\psi_5 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_5 = 0.01 \text{m}^{-1}$$

ITERACION 6:  $k_d := 35 \text{ cm}$        $\epsilon_{cm} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{pmatrix} 2.571 \times 10^{-3} \\ 2.571 \times 10^{-3} \\ 2.571 \times 10^{-3} \\ 8.571 \times 10^{-4} \\ 8.571 \times 10^{-4} \\ 8.571 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad f_{si} := \begin{pmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{pmatrix} \quad f_{si} = \begin{pmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 1.714 \times 10^7 \\ 1.714 \times 10^7 \\ 1.714 \times 10^7 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_6 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_6 = 273518 \text{ kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_6 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_6 = 6.728 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg}$$

La curvatura asociada es:  $\psi_6 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_6 = 8.5714 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

ITERACION 7:  $k_d := 40\text{cm}$      $\epsilon_{cm} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.625 \times 10^{-3} \\ 2.625 \times 10^{-3} \\ 2.625 \times 10^{-3} \\ 1.125 \times 10^{-3} \\ 1.125 \times 10^{-3} \\ 1.125 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 2.25 \times 10^7 \\ 2.25 \times 10^7 \\ 2.25 \times 10^7 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_7 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si_i} \cdot A_{s_i}) \quad P_7 = 310757\text{kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_7 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si_i} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_7 = 2.179 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

La curvatura asociada es:  $\psi_7 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_7 = 7.5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

**ITERACION 8:**  $\underset{\text{XXXXX}}{kd} := 60\text{cm}$        $\underset{\text{XXXXXXXX}}{\epsilon_{cm}} := \epsilon_{cu}$

$$\epsilon_{si} := \begin{bmatrix} \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_0)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_1)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_2)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_3)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_4)}{kd} \\ \epsilon_{cm} \cdot \frac{(kd - d_5)}{kd} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{si} = \begin{bmatrix} 2.75 \times 10^{-3} \\ 2.75 \times 10^{-3} \\ 2.75 \times 10^{-3} \\ 1.75 \times 10^{-3} \\ 1.75 \times 10^{-3} \\ 1.75 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad f_{si} := \begin{bmatrix} f_s(\epsilon_{si_0}) \\ f_s(\epsilon_{si_1}) \\ f_s(\epsilon_{si_2}) \\ f_s(\epsilon_{si_3}) \\ f_s(\epsilon_{si_4}) \\ f_s(\epsilon_{si_5}) \end{bmatrix} \quad f_{si} = \begin{bmatrix} 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 4.2 \times 10^7 \\ 3.5 \times 10^7 \\ 3.5 \times 10^7 \\ 3.5 \times 10^7 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Equilibrio de fuerzas en la dirección Axial:

$$P_8 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd + \sum_{i=0}^5 (f_{si} \cdot A_{s_i}) \quad P_8 = 454407\text{kg}$$

El momento flector asociado a esta deformación en el concreto es:

$$M_8 := \alpha(\epsilon_{cm}) \cdot f_{cm} \cdot b \cdot kd \cdot \left( \frac{h}{2} - \gamma(\epsilon_{cm}) \cdot kd \right) + \sum_{i=0}^5 \left[ f_{si} \cdot A_{s_i} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right) - d_i \right] \right] \quad M_8 = -2.794 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

La curvatura asociada es:  $\psi_8 := \frac{\epsilon_{cm}}{kd} \quad \psi_8 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

Finalmente resumiendo para la sección:

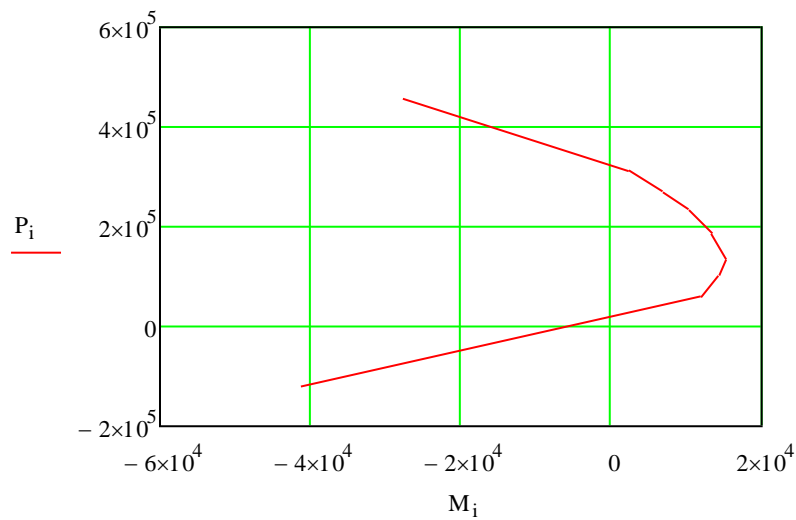
$i := 0, 1..8$

$P_i =$

-120406.35	kg
60988.57	
102171.22	
136228.3	
186317.91	
235219.93	
273518.42	
310756.55	
454407.32	

$M_i =$

-41108.07188	m·kg
12002.02385	
14472.56987	
15222.85631	
13362.18643	
10137.53566	
6728.01682	
2179.31199	
-27937.54392	



**Gráfico 22: Diagrama de interacción carga axial - momento de una sección 0.30 x 0.30 de concreto armado f'c 210 CON FRP**