CAPITULO 7

Aplicaciones de la Integral Definida

Licda. Elsie Hernández Saborío

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1988.
Edición LaTeX:	Luis Ernesto Carrera
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Luis Ernesto Carrera, Walter Mora, Marieth Villalobos.

Comentarios y correcciones: escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

7.1 Cálculo de áreas . . . 5
7.2 Área de una región comprendida entre dos curvas . . . 8
7.3 Volúmenes de sólidos de revolución . . . 15
7.4 Longitud de una curva plana . . . 30
7.5 Cálculo de trabajo con ayuda de la integral definida . . . 34

La integral definida es una herramienta útil en las ciencias físicas y sociales, ya que muchas cantidades de interés en dichas ciencias pueden definirse mediante el tipo de suma que se presenta en la integral definida.
Antes de estudiar casos específicos en que se utiliza la integral definida, daremos las siguientes definiciones:

Definición 1

Recibe el nombre de *partición* de un intervalo cerrado $[a, b]$ un conjunto de intervalos cerrados:

$$\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]\}$$

que posee las propiedades:

1. $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]\} = [a, b]$
2. $[x_{i-1}, x_i] \cap [x_i, x_{i+1}] = x_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
3. $[x_{j-1}, x_j] \cap [x_k, x_{k+1}] = \emptyset$ a menos que $k = j$ o $j - 1 = k + 1$.

Definición 2

Cada intervalo en una partición de $[a, b]$ se llama subintervalo $[a, b]$. Una partición está determinada por los números que son puntos externos de los subintervalos de la partición. Así, una partición que contenga n subintervalos queda determinada por un conjunto de $n + 1$ números.

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{i-1} < x_i$ para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Denotaremos con P_n la partición determinada por este conjunto de $n + 1$ números, así:

$$P_n = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]\}$$

Definición 3

Si P_n es una partición de un intervalo $[a, b]$, la *norma* N_p de P_n es el mayor de los n números

$$(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), (x_3 - x_2), \ldots, (x_n - x_{n-1}),$$

donde

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

o sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

La norma N_p de una partición P_n es la longitud del más grande de los subintervalos en la gráfica de P_n que se muestra a continuación:

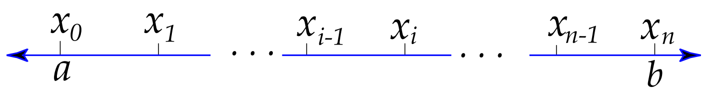


Figura 7.1:

Definición 4

Si P_n es una partición en un intervalo $[a,b]$, un *aumento* T_n de la partición es un conjunto de números $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ tales que

$$x_0 \leq t_1 \leq x_1,\ x_1 \leq t_2 \leq x_2,\ x_2 \leq t_3 \leq x_3,\ \ldots,\ x_{n-1} \leq t_n \leq x_n,$$

o sea, $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Gráficamente:

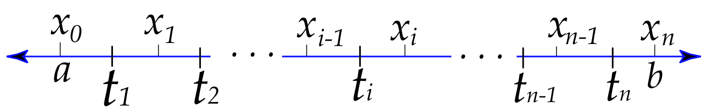


Figura 7.2:

7.1 Cálculo de áreas

Sea f una función cuyo dominio está en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$.
Sea R la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = f(x)$, $y = 0$ (eje x), $x = a$, $x = b$.

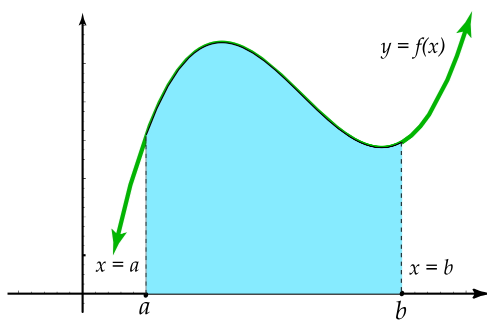


Figura 7.3:

Sea P_n una partición de $[a,b]$ en n subintervalos determinados por el conjunto $\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n\}$, con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un aumento de P_n.

Construimos n rectángulos cuyas bases sean los n intervalos de la partición P_n cuyas alturas sean

$$f(t_1),\ f(t_2),\ \ldots,\ f(t_i),\ \ldots,\ f(t_{n-1}),\ f(t_n).$$

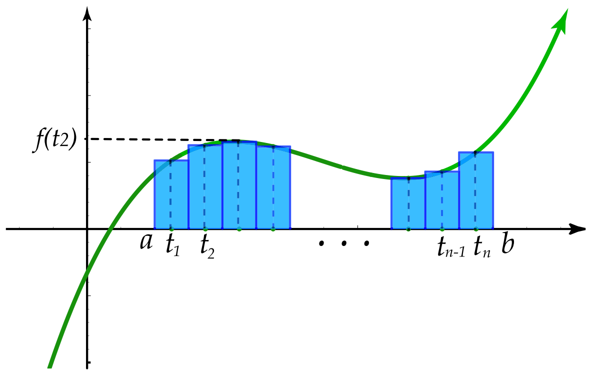


Figura 7.4:

El área del i–ésimo rectángulo está dada por $f(t_i)\cdot\Delta x_i$; y la suma

$$\sum_{i=n}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

de las áreas de los n rectángulos será una aproximación al área de R.

Si aumentamos el número de subintervalos, entonces decrece la longitud de cada subintervalo de la partición P_n, obteniéndose una nueva suma que dará una mayor aproximación al área de R.

Demos ahora la siguiente definición:

■ Definición 5

Si $f(x)\geq 0$ para $x\in[a,b]$, y si existe un número A tal que dada una $\epsilon>0$, exista $\delta>0$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i\ -A\right|<\epsilon$$

para toda partición P_n de $[a,b]$, y todo aumento de P_n en que $N_p<\delta$, entonces este número A es el área de la región limitada por las gráficas de la ecuación $y=f(x),\ y=0,\ x=a,\ x=b$.
Note que de esta definición se tiene que:

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i\right)=A$$

y si A existe, entonces:

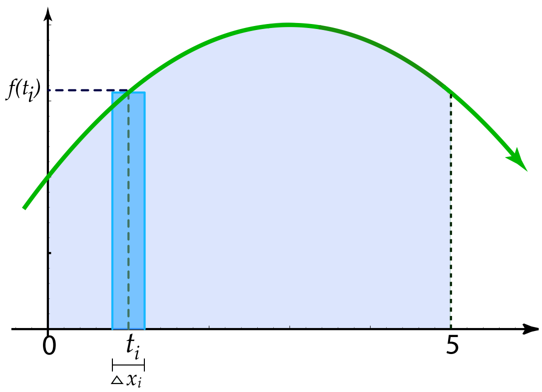
$$A=\int_a f(x)$$

■ Ejemplo 1

Calculemos el área de la región R limitada por las gráficas de $y=1+\dfrac{6x-x^2}{9}$, $y=0$, $x=5$, $x=0$.

Solución

La representación gráfica es la siguiente:



$$f(t_i) = 1 + \frac{6t_i - t_i^2}{9}$$

El área del $i-$ésimo rectángulo es:

$$1 + \frac{6t_i - t_i^2}{9} \cdot \Delta x_i$$

Figura 7.5:

La suma de aproximación para el área de R es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i - i^2}{9} \cdot \Delta x_i\right)$$

(En la gráfica anterior se muestra el $i-$ésimo rectángulo de la aproximación).

Luego de la definición **??** se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 \left(1 + \frac{6x - x^2}{9}\right) dx \\ &= \left(x + \frac{3}{9}x^2 - \frac{x^3}{27}\right)\Bigg|_0^5 \\ &= 5 + \frac{3}{9}(25) - \frac{125}{27} - 0 \\ &= \frac{235}{27}(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calculemos el área de la región R limitada por las gráficas de $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$.

Solución

Graficamente se tiene:

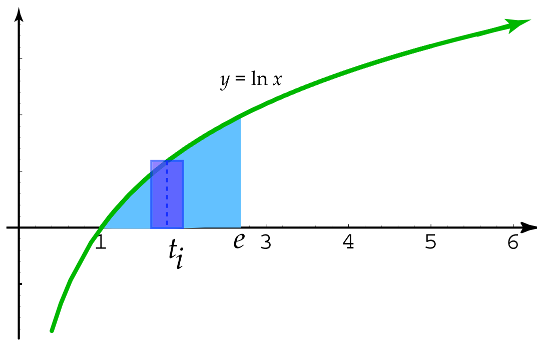


Figura 7.6:

Como $\ln x = 0 \iff x = 1$, entonces la curva interseca al eje x en el punto $(1, 0)$. El área de la región R está dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e \ln x\, dx \\ &= (x \ln x - x)\Big|_1^e \\ &= e \ln e - e - \ln 1 + 1 \\ &= 1\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Se utilizó el método de integración "por partes".

7.2 Área de una región comprendida entre dos curvas

Sean f y g dos funciones con dominio en el intervalo $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$.
Vamos a determinar cuál es el área de la región R limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ que se muestra a continuación:

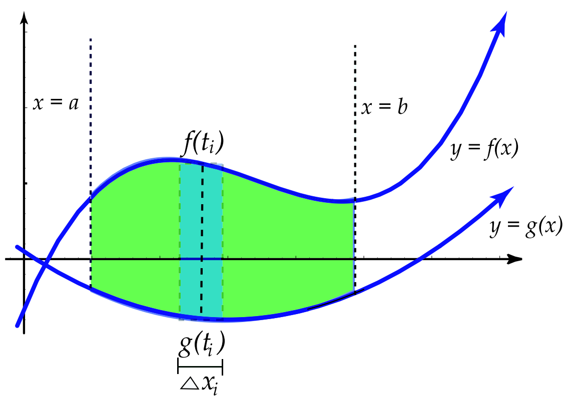


Figura 7.7:

Construimos un conjunto de rectángulos tales que la suma de sus áreas sea una aproximación al área de R.

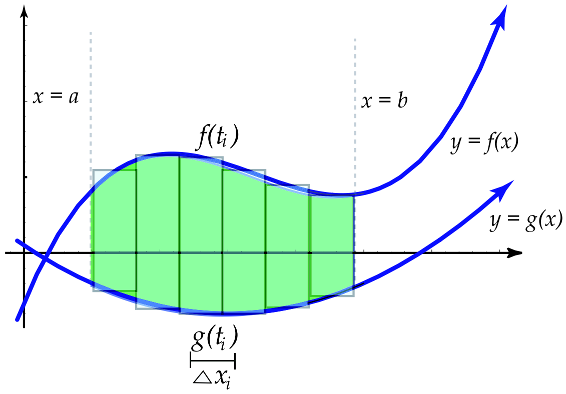


Figura 7.8:

Sea P_n una partición de $[a, b]$ en n subintervalos determinados por el conjunto

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ un aumento de P_n. Construimos n rectángulos cuyos anchos sean los n subintervalos de la partición P_n, y cuyas alturas sean:

$$f(t_1) - g(t_1),\ f(t_2) - g(t_2),\ \ldots,\ f(t_i) - g(t_i),\ \ldots,\ f(t_n) - g(t_n).$$

El área del $i-$ésimo rectángulo es: $[f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$, y la suma de aproximación para el área de R está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$$

Si aumentamos el número de subintervalos, entonces decrece la longitud de cada subintervalo de la partición P_n, obteniéndose una nueva suma que dará una mayor aproximación al área de R.

Se tiene entonces la siguiente definición:

Definición 6

Si $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$, y si existe un número A, tal que dada una $\epsilon > 0$ exista una $\delta > 0$ para lo cual

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i - A \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a, b]$ y todo aumento de P_n con $N_p < \delta$, entonces dicho número A *es el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones* $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$.
De esta definición se tiene que:

$$A = \lim_{N_p \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$$

Si h es la función definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ para $x \in [a, b]$, y si A existe, entonces:

$$A = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

■ Ejemplo 3

Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = \dfrac{(x-2)^2}{9} - 1,\ y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{5},\ x = 4$

Solución

Graficamente se tiene:

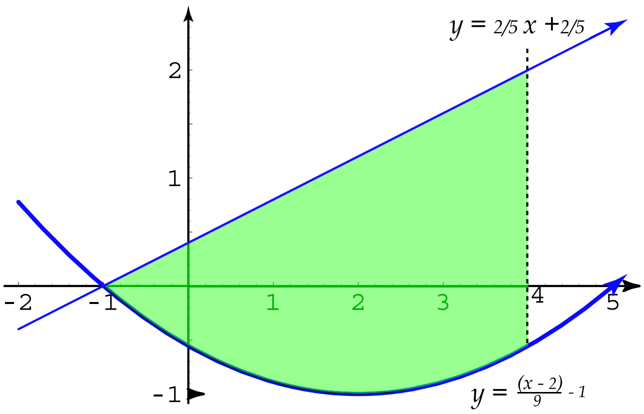


Figura 7.9:

Note que las gráficas de $y = \dfrac{(x-2)^2}{9} - 1,\ y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{5}$ se intersecan en el punto $(-1, 0)$.
En este caso, el área del $i-$ésimo rectángulo es:

$$\left[\left(\frac{2}{5}t_i + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{(t_i-2)^2}{9} - 1\right)\right] \cdot \Delta x_i$$

y la suma de aproximación está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{2}{5}t_i + \frac{2}{5} - \left[\frac{(t_i-2)^2}{9} - 1\right]\right\} \cdot \Delta x_i$$

Según la definición **??** se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{4} \left[\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} - \frac{(x-2)^2}{9} + 1\right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{(x-2)^3}{27} + x\right]\Bigg|_{-1}^{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{5}+\frac{8}{5}-\frac{8}{27}+4-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+\frac{27}{27}-1\right) \\ &= \frac{235}{27}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4**

Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = \frac{-x}{2} + 1,\ x = -2,\ x = 4,\ y = 0.$

Solución

Graficamente se tiene:

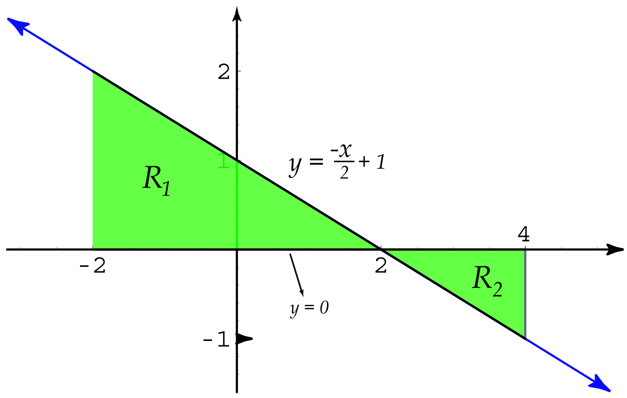


Figura 7.10:

La recta con ecuación $y = \frac{-x}{2} + 1$ interseca al eje x en el punto $(2, 0)$.

Note que la región R está formada por dos partes, las regiones R_1 y R_2, por lo que el área de R = área de R_1 + área de R_2.

La región R_1 está limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{-x}{2} + 1$, inferiormente por la de $y = 0$, lateralmente por la de $x = -2$ y $x = 2$.

Luego:

$$\begin{aligned} \text{área de } R_1 &= \int_{-2}^{2} \left(\frac{-x}{2} + 1 - 0\right) dx \\ &= \left(\frac{-x^2}{4} + x\right)\Big|_{-2}^{2} \\ &= 4\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

La región R_2 está limitada superiormente por la gráfica de $y = 0$, inferiormente por la de $y = \frac{-x}{2} + 1$, lateralmente por la de $x = 2$ y $x = 4$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\text{área de } R_2 &= \int_2^4 \left[0 - \left(\frac{-x}{2} + 1\right)\right] dx \\
&= \int_2^4 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx \\
&= \left(\frac{x^2}{4} - x\right)\Big|_2^4 \\
&= 1\ (u.l.)^2
\end{aligned}$$

Por tanto, el área de R es igual a: $4 + 1 = 5\ (u.l.)^2$.

■ Ejemplo 5

Hallar el área de la región R señalada en la figura adjunta, que está limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1,\ y = \dfrac{x}{3} + 1,\ y = -x + 5$.

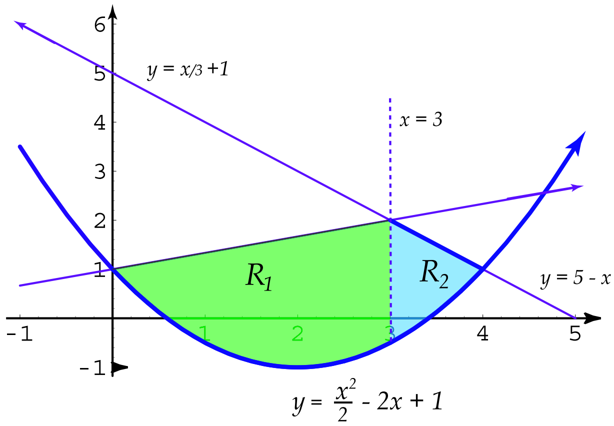


Figura 7.11:

Solución

R puede dividirse en dos regiones R_1 y R_2.

Las rectas con ecuaciones $y = \dfrac{x}{3} + 1,\ y = -x + 5$ se intersecan en el punto $(3, 2)$ (*¡compruébelo!*).

La recta con ecuación $y = -x + 5$ y la parábola se intersecan en el punto $(4, 1)$.

La recta con ecuación $y = \frac{x}{3} + 1$ y la parábola se intersecan en el punto $(0, 1)$

Luego: área de R = área de R_1 + área de R_2

$$\text{área de } R_1 = \int_0^3 \left[\frac{x}{3} + 1 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)\right] dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^3 \left[x - \quad \right] dx \\
&= \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^3 \\
&= 6 \; (u.l.)^2 \\
\text{área de } R_2 &= \int_3^4 \left[-x + 5 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1 \right) \right] dx \\
&= \int_3^4 \left(4 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \left(4x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_3^4 \\
&= \frac{31}{3} \; (u.l.)^2
\end{aligned}
$$

Entonces: área de $R = 6 + \dfrac{31}{3} \; (u.l.)^2$.

Ejemplo 6

Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = x, \; y = -x + 2$.

Solución

La representación gráfica es la siguiente:

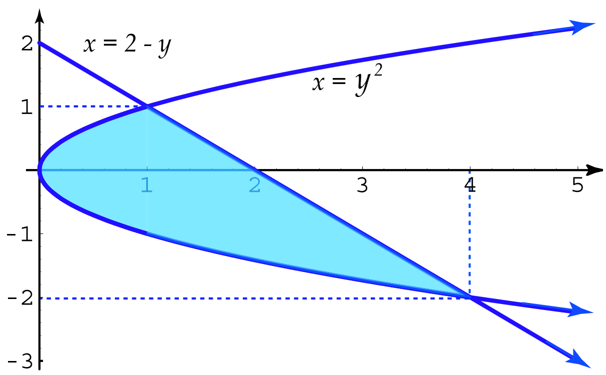


Figura 7.12:

Las gráficas se intersecan en los puntos $(1, 1)$ y $(4, -2)$ (Verifíquelo algebraicamente).

En esta caso podemos tomar "y" como variable independiente y x como la variable dependiente, es decir, $x = g(y) = 2 - y$.

Así el área de la región R está dada por:

$$
\begin{aligned}
& \int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy \\
= & \left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} \\
= & \frac{9}{2}\,(u.l.)^2
\end{aligned}
$$

Otra forma de obtener el área de la región R es la siguiente:

$y=\sqrt{x}$ $\;y=-\sqrt{x}$ $\;y=2-x$

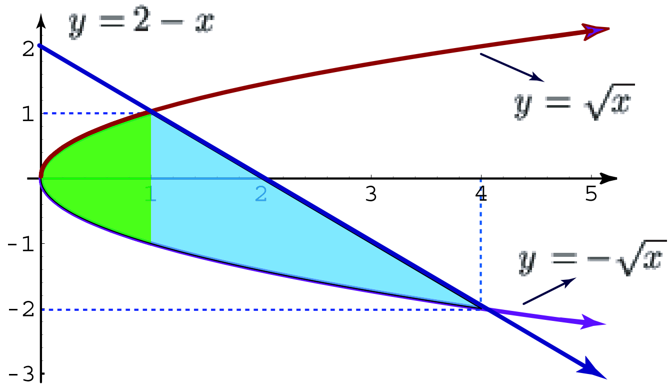


Figura 7.13:

Dividimos la región R en dos regiones R_1 y R_2. La región R_1 está limitada superiormente por la gráfica de $y=\sqrt{x}$, inferiormente por la de $y=-\sqrt{x}$, lateralmente por la de $x=1$ y $x=0$.

Así:

$$
\begin{aligned}
\text{área de } R_1 &= \int_0^1 \left[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right]dx \\
&= \int_0^1 2\sqrt{x}dx \\
&= \frac{4}{3}(\sqrt{x})^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{4}{3}\,(u.l.)^2
\end{aligned}
$$

La región R_2 está limitada superiormente por la gráfica de $y=-x+2$, inferiormente por la de $y=-\sqrt{x}$, lateralmente por la de $x=1$.

Luego:

$$
\text{área de } R_2 = \int_1^4 \left[-x+2-(-\sqrt{x})\right]dx
$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_1^4 \\ &= \frac{19}{6}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{área de } R &= \text{área de } R_1 + \text{área de } R_2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{19}{6} \\ &= \frac{27}{6}\,(u.l.)^2. \end{aligned}$$

7.3 Volúmenes de sólidos de revolución

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$.

Recibe el nombre de *sólido de revolución*, el sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo.

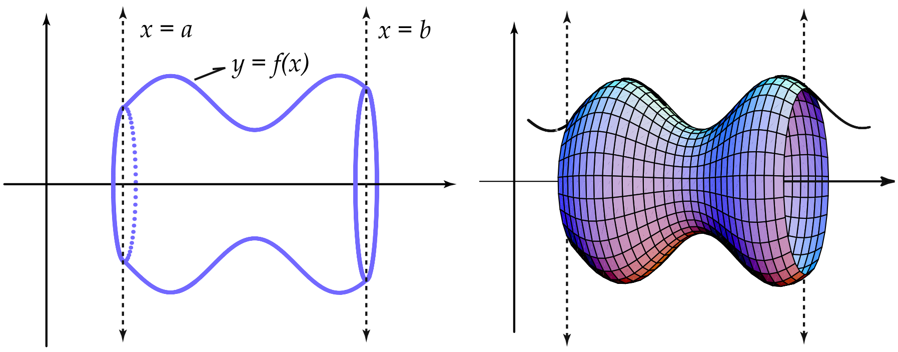


Figura 7.14:

Para determinar el volumen de este tipo de sólidos, seguiremos un procedimiento similar al utilizado para el área de una región, aproximando el "volumen" de un sólido de revolución por medio de una suma de volúmenes de sólidos más elementales, en los que el volumen ya ha sido definido.
Vamos a considerar discos o cilindros circulares como los sólidos elementales, asumiendo que el volumen de un disco circular es, por definición, el producto del área A de la base por el espesor h (o altura).

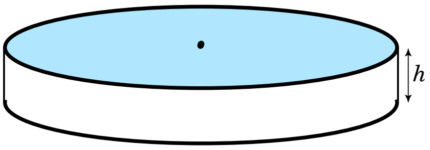


Figura 7.15:

Consideremos una partición P_n del intervalo $[a, b]$ determinada por el conjunto de números

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, con $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un aumento de P_n.

Consideremos ahora los n discos circulares, cuyos sensores son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$, y cuyas bases tienen radios $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_i), \ldots, f(t_n)$.

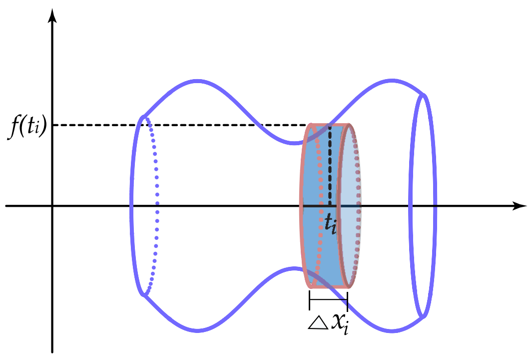


Figura 7.16:

El volumen del $i-$ésimo disco es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

La suma

$$\sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

de los volúmenes de los n discos nos da una aproximación al volumen del sólido de revolución.

Podemos suponer que mientras más delgados sean los discos, mayor será la aproximación de la suma anterior al volumen del sólido.

Se tiene entonces la siguiente definición:

■ **Definición 7**

Si existe un número V tal que dada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i - V \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a, b]$ y todo aumento T_n de P_n, y con $N_p < \delta$, este número V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ alrededor del eje x.

Si h es la función dada por $h(x) = \pi[f(x)]^2$ para $x \in [a, b]$, entonces la suma de aproximación:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

utilizada en la definición del volumen del sólido de revolución, puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{n} h(t_i) \cdot \Delta x_i$$

donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \Delta x_i = x_{i-1} - x_i$.

Luego, de la definición de integral y de la definición de V dada, se tiene que

$$V = \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$

Consideremos ahora dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$. Sea R la región del plano limitada por las curvas con ecuaciones $y = f(x),\ y = g(x)$ y las rectas con ecuaciones $x = a,\ x = b$.

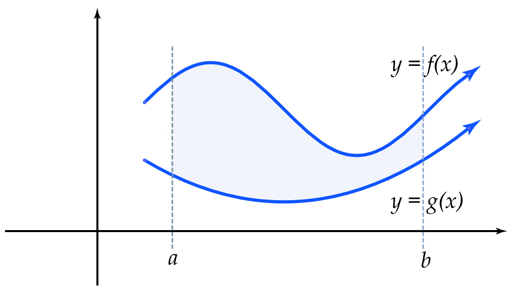


Figura 7.17:

Deseamos determinar el volumen V del sólido de revolución generado al girar la región R alrededor del eje x (note que en este caso *no* giramos la región R alrededor de una de sus fronteras).

El sólido generado se muestra en la siguiente figura:

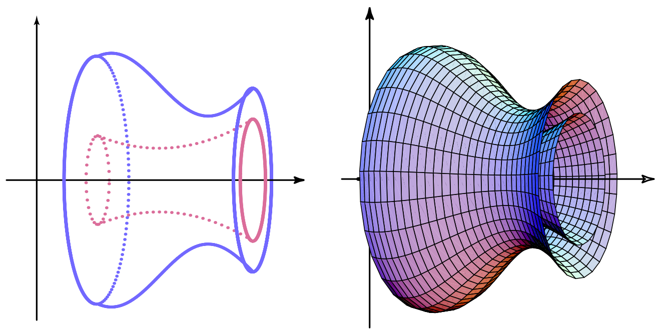


Figura 7.18:

Sea P_n una partición del intervalo $[a, b]$ determinada por el conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y sea $T_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n\}$ un aumento de P_n.

En este caso, los sólidos elementales usados para obtener una suma de aproximación del volumen del sólido de revolución, serán anillos circulares.

Se muestra a continuación el $i-$ésimo rectángulo y el $i-$ésimo anillo circular generado al rotar aquel alrededor del eje x.

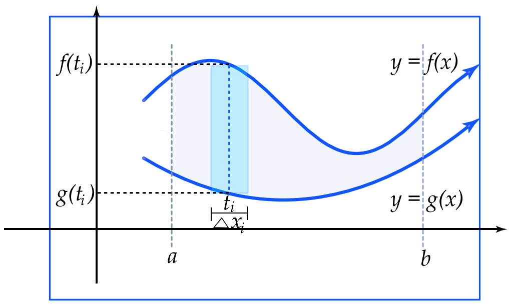


Figura 7.19:

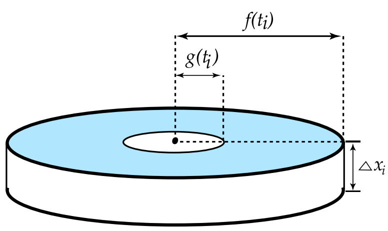


Figura 7.20:

Luego, el área del anillo circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 - \pi[g(t_i)]^2$$

por lo que el volumen del $i-$ésimo elemento sólido será:

$$\Delta V_i = \pi\big([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\big) \cdot \Delta x_i$$

Entonces, la suma de aproximación para el volumen del sólido de revolución es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\big([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\big) \cdot \Delta x_i$$

Puede suponerse que mientras más delgados sean los anillos circulares, mayor será la aproximación de la suma anterior al volumen del sólido.

Definición 8

Si existe un número V tal que dada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \pi\big([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\big)\Delta x_i - V \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a, b]$ y todo aumento T_n de P_n, y con $N_p < \delta$, este número de V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, alrededor del eje x.

Si h es la función dada por $h = \pi\big([f(x)]^2 - [g(x)]^2\big)$ para $x \in [a, b]$, entonces la suma de aproximación

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\big([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2\big) \cdot \Delta x_i$$

utilizada en la definición **??**, puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{n} h(t_i)\, \Delta x_i$$

donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Luego se tiene que:

$$V = \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b \pi\big([f(x)]^2 - [g(x)]^2\big)\, dx$$

Ejemplo 7

Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$.

Solución

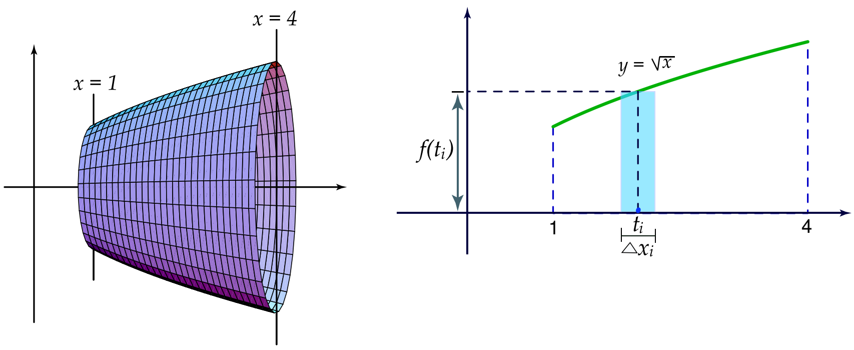


Figura 7.21:

Observe, en la figura de la derecha, $i-$ésimo rectángulo que al rotar alrededor del eje x genera un disco circular en forma de cilindro circular recto.

El volumen del $i-$ésimo disco circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi(\sqrt{t_i})^2 \cdot \Delta x_i$$

La suma de aproximación del volumen:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(\sqrt{t_i})^2 \cdot \Delta x_i$$

El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi x \, dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 \\ &= 8\pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{15}{2}\pi \ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 8

Hallar el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de $y = 2 - x,\ x = 0,\ y = 0$ gira alrededor del eje x.

Solución

La representación gráfica del sólido de revolución es la siguiente:

El volumen del $i-$ésimo disco circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi[2 - t_i]^2 \cdot \Delta x_i$$

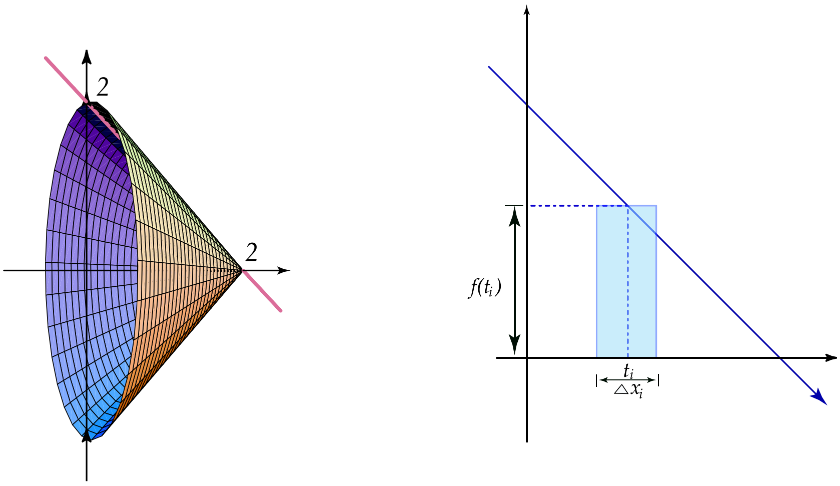


Figura 7.22:

La suma de aproximación del volumen es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(2 - t_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

Luego, si $f(x) = 2 - x$, entonces el volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^2 [f(x)]^2\, dx &= \pi \int_0^2 (2-x)^2\, dx \\ &= \frac{-\pi}{3}(2-x)^3 \Big|_0^2 \\ &= \frac{8\pi}{3}\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 9

Hallar el volumen engendrado cuando la superficie limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$, y las rectas con ecuaciones $y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$, gira en torno al eje x.

Solución

La representación gráfica es la siguiente:

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces:

1. El volumen del $i-$ésimo rectángulo es:

$$\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi(\operatorname{sen} t_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

2. La suma de aproximación del volumen es:

$$\sum_{i_1}^{n} \pi(\operatorname{sen} t_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

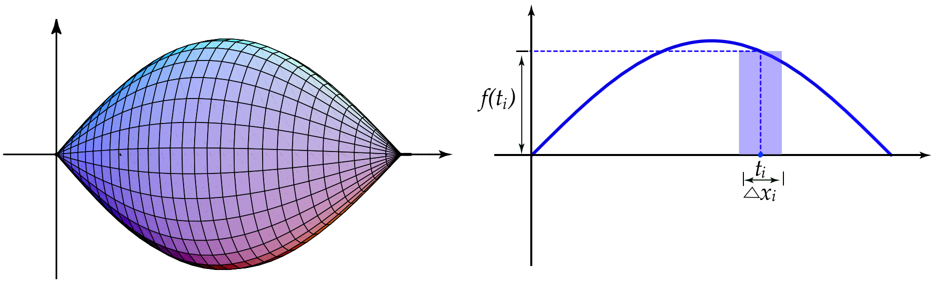


Figura 7.23:

3. El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \pi(\operatorname{sen} x)^2\,dx &= \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\Big|_0^{\pi}\\ &= \frac{\pi^2}{2}\,(u.l.)^3\end{aligned}$$

Ejemplo 10

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Solución

La representación gráfica de la región y del $i-$ésimo rectángulo es la siguiente:

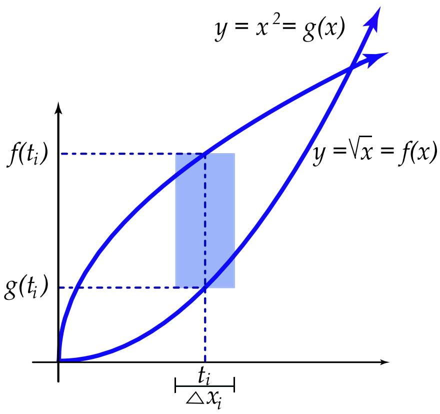


Figura 7.24:

El volumen del $i-$ésimo anillo circular es:

$$\pi\big([\sqrt{t_i}]^2 - [t_i^2]^2\big) \cdot \Delta x_i$$

La suma de aproximación del volumen es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\big([\sqrt{t_i}]^2 - [t_i^2]^2\big) \cdot \Delta x_i$$

Luego, el volumen del sólido de revolución está dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\big[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\big]\,dx \\
&= \pi \int \left(x - x^4\right) dx \\
&= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0 \\
&= \frac{3}{10}\,\pi\ (u.l.)^3
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 11**

Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo anterior, alrededor del eje y.

Solución

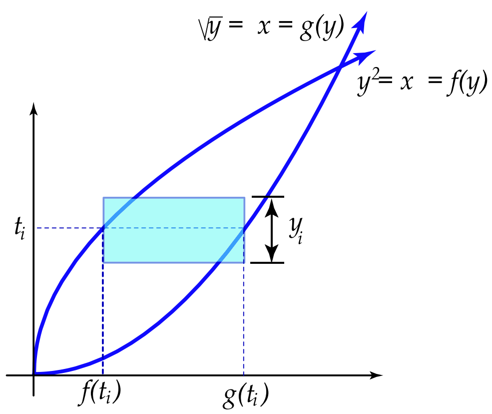


Figura 7.25:

El anillo circular tiene como radio máximo $g(t_i)$, y como radio mínimo $f(t_i)$.

En este caso tomamos x como la variable dependiente, y se tiene que el volumen del sólido está dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\big([g(y)]^2 - [f(y)]^2\big)\,dy \\
&= \int_0^1 \pi\big[(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2\big]\,dy \\
&= \int_0^1 \pi\big(y - y^4\big)\,dx \\
&= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{10}\,\pi\;(u.l.)^3
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 12**

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje y, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, $a > 0$, que intercepta la recta $x = a$

Solución

La representación gráfica de la región y del $i-$ésimo rectángulo es la siguiente:

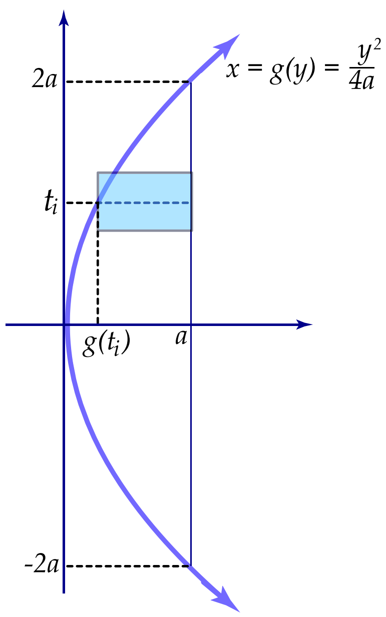


Figura 7.26:

El anillo circular tiene como radio máximo $x = a$, y como radio interior $x = \dfrac{y^2}{4a}$.

Tomamos x como la variable dependiente.

El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2a}^{2a} \pi \left[a^2 - \left(\frac{y^2}{4a} \right)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_{-2a}^{2a} \left(a^2 - \frac{y^4}{16a^2} \right) dx \\ &= \pi \left(a^2 y - \frac{y^5}{80a^2} \right) \Bigg|_{-2a}^{2a} \\ &= \pi \left(2a^3 - \frac{32a^5}{80a^2} \right) - \pi \left(-2a^3 + \frac{32a^5}{80a^2} \right) \\ &= \frac{16}{5} a^3 \pi \ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 13**

Determinar el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 4$, gira alrededor de:

1. el eje y
2. la recta con ecuación $y = 4$
3. el eje x
4. la recta con ecuación $y = -1$
5. la recta con ecuación $x = 2$

Solución

1. La región en el plano xy que gira alrededor del eje y es la siguiente:

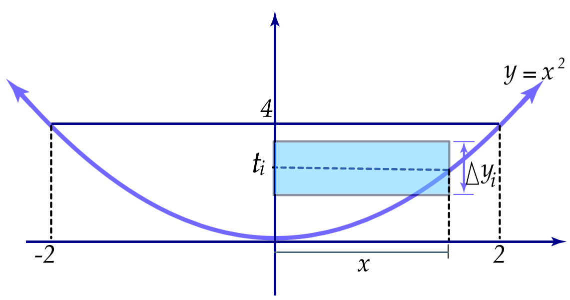


Figura 7.27:

Se tiene que el radio del sólido generado es:

$$x = \sqrt{y}$$

El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\pi[\sqrt{t_i}]^2 \cdot \Delta y_i$$

El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi[\sqrt{y}]^2 \, dy \\ &= \int_0^4 \pi \, y \, dy \\ &= \pi \frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 \\ &= 8\pi \; (u.l.)^3 \end{aligned}$$

2. La región gira alrededor de la recta con ecuación $y = 4$

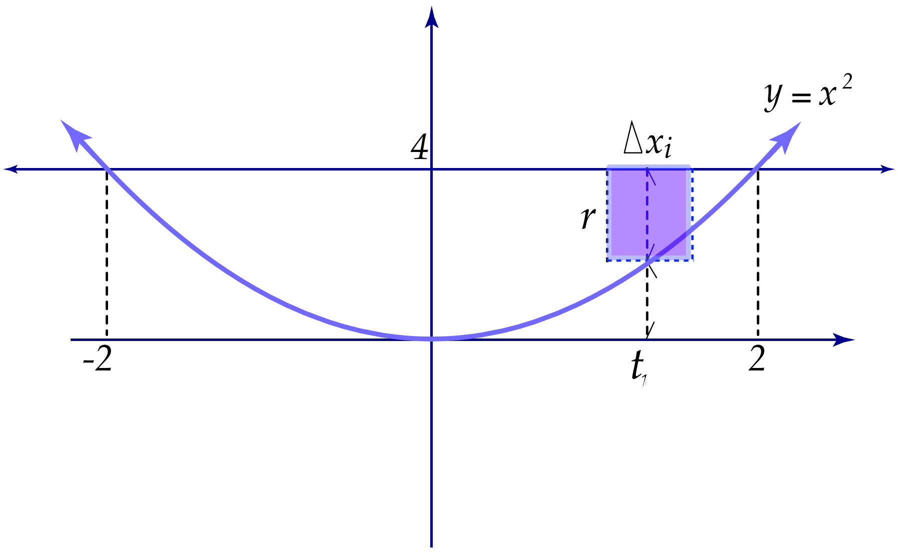


Figura 7.28:

El radio del $i-$ésimo disco circular es:

$$4 - t_i^2$$

El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\pi\big[4 - t_i^2\big]^2 \cdot \Delta x_i$$

En general, el radio del sólido generado es:

$$4 - y = 4 - x^2$$

Luego, el volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} \pi\big(4 - x^2\big)^2\, dx \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \big(16 - 8x^2 + x^4\big)\, dx \\
&= \pi\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\
&= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \pi\left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{512}{15}\,\pi\ (u.l.)^3
\end{aligned}$$

3. Note que al girar la región alrededor del eje x, el $i-$ésimo elemento sólido tiene como base un anillo circular.

   El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\big[\pi(4)^2 - \pi(t_i^2)^2\big] \cdot \Delta x_i$$

   Luego, el volumen del sólido generado está dado por la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} \pi\big[16 - (x^2)^2\big]\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \pi\big(16 - x^4\big)\, dx \\
&= \pi\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\
&= \pi\left(32 - \frac{32}{5}\right) - \pi\left(-32 + \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{256}{5}\,\pi\ (u.l.)^3
\end{aligned}$$

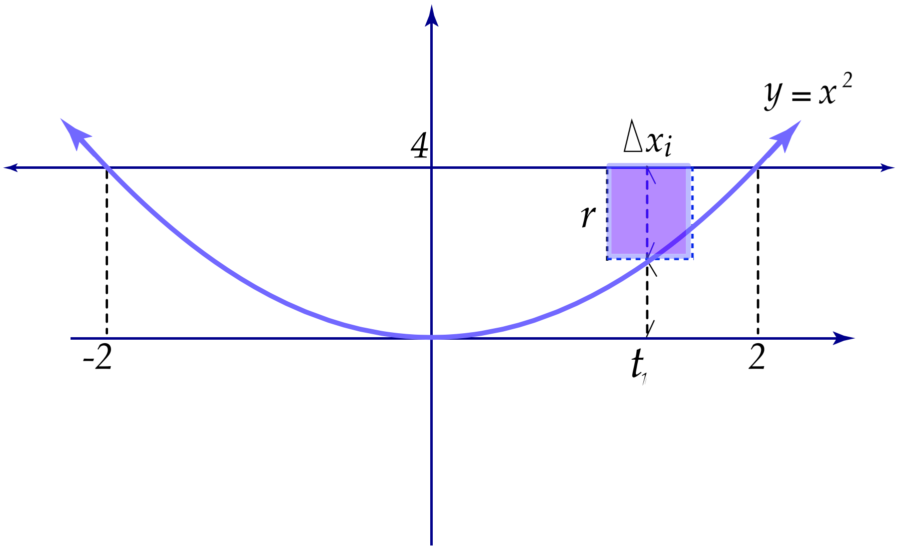


Figura 7.29:

4. La región gira alrededor de la recta con ecuación $y = -1$

   El radio máximo del anillo circular es $y = 5 = 4 + |-1|$

   El radio interior del anillo es $y = x^2 + |-1| = x^2 + 1$

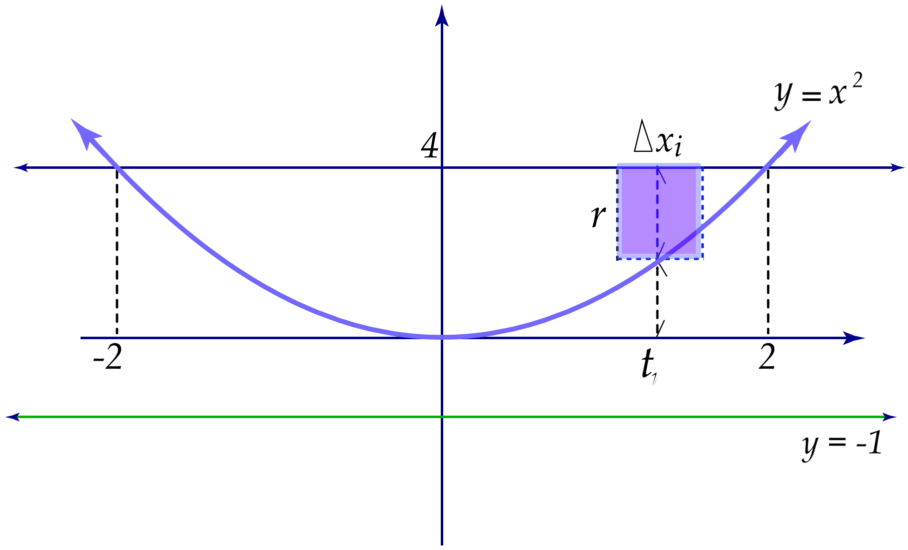


Figura 7.30:

El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\left[\pi(5)^2 - \pi\left(t_i^2+1\right)^2\right] \cdot \Delta x_i$$

El volumen del sólido generado está dado por la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2}\left[25\pi - \pi\left(x^2+1\right)^2\right]\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\pi\left(25 - x^4 - 2x^2 - 1\right)dx \\
&= \pi\left(24x - \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} \\
&= \pi\left(48 - \frac{32}{5} - \frac{16}{3}\right) - \pi\left(-48 + \frac{32}{5} + \frac{16}{3}\right) \\
&= \frac{1088}{15}\,\pi\;(u.l.)^3
\end{aligned}$$

5. La región gira alrededor de la recta con ecuación $x = 2$

De nuevo, el $i-$ésimo elemento sólido tiene como base un anillo circular, cuyo radio máximo es $2+\left|-\sqrt{t_i}\right|$, y cuyo radio interior es $2-\sqrt{t_i}$.

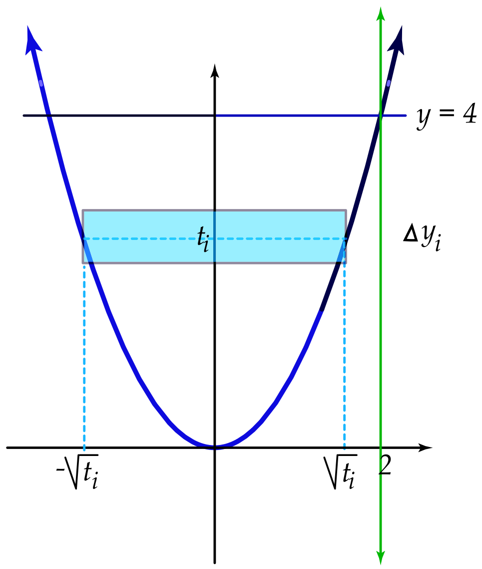


Figura 7.31:

El volumen del $i-$ésimo elemento sólido es:

$$\left[\pi(2+\sqrt{t_i})^2 - \pi(2-\sqrt{t_i})^2\right]\cdot\Delta y_i$$

Luego, el volumen del sólido está dado por la siguiente integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \left[\pi(2+\sqrt{y})^2 - \pi(2-\sqrt{y})^2\right] dy \\ &= \pi \int_0^4 8\sqrt{y}\, dy \\ &= 8\pi \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^4 \\ &= \frac{16}{3}\,\pi\sqrt{y^3}\Big|_0^4 \\ &= \frac{128}{3}\,\pi\ (u.l.)^3 \end{aligned}$$

7.4 Longitud de una curva plana

Vamos a determinar la longitud s del arco de una curva con ecuación $y = f(x)$, comprendida entre los puntos $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

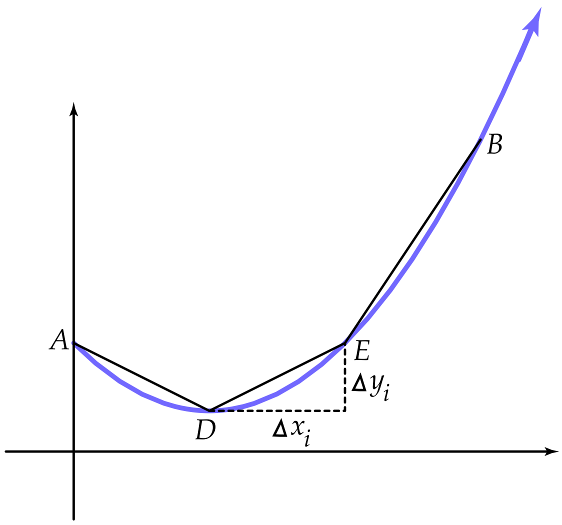


Figura 7.32:

Como se muestra en la figura anterior, dividimos el arco AB en n partes, uniendo luego los sucesivos puntos de división por segmentos rectilíneos.

Por ejemplo, el segmento DE tendrá como longitud

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Luego, tendremos una aproximaxión de la longitud de la curva AB, mediante la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Si aumentamos indefinidamente el número de puntos de división, entonces las longitudes de los segmentos tienden a cero, por lo que:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

nos da el arco AB, siempre que el límite exista.

Para expresar el límite como una integral tenemos lo siguiente: supongamos que la función con ecuación $y = f(x)$ es continua y posee derivada continua en cada punto de la curva, donde $A(a, f(a))$ hasta $B(b, f(b))$. Luego, por el teorema del valor medio para derivadas, existe un punto $D^*(x_i^*, y_i^*)$ entre los puntos D y E de la curva, donde la tangente es paralela a la cuerda DE, esto es:

$$f'(x_i^*) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \quad \text{o sea} \quad \Delta y_i = f'(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

Luego

$$\begin{aligned} & \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ & \text{puede expresarse como:} \\ & \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(x_i^*) \cdot \Delta x_i]^2} \\ = & \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x \right) \end{aligned}$$

que por definición corresponde a la integral:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx$$

(hemos expresado $f'(x)$ como dy/dx).

Como la longitud de una curva no depende de la elección de los ejes coordenados, si x puede expresarse como función de y, entonces la longitud del arco está dada por

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \, dy$$

En cada caso calcular la longitud del arco de curva que se indica.

Ejemplo 14

$y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

Solución

Designemos con L la longitud del arco.

Como $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, entonces $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2+2}$

Luego:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^3 \sqrt{1+\left[x\sqrt{x^2+2}\right]^2}\,dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx \\
&= \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \int_0^3 (x^2+1)\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^3 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

Ejemplo 15

$9x^2 = 4y^3$, desde $(0,0)$ hasta $(2\sqrt{3},3)$

Solución

En este caso, tomemos x como variable dependiente y obtengamos $\frac{dx}{dy}$ por medio de derivación implícita:

$18x\frac{dx}{dy} = 12y^2$ de donde $\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{3x}$

Luego, la longitud L del arco está dada por:

$$
L = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{2y^2}{3x}\right)^2}\,dy
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{4y^4}{9x^2}}dy \\
&= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{4y^4}{4y^3}}\,dy \\
&= \int_0^3 \sqrt{1+y}\,dy \\
&= \frac{2}{3}\,(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 \\
&= \frac{16}{3}-\frac{2}{3} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 16**

$x=\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{1}{8y^2}$, desde $y=1$ hasta $y=2$

Solución

Obtenemos de nuevo $\dfrac{dx}{dy}$, pues $x=h(y)$

$$\frac{dx}{dy}=y^3-\frac{1}{4y^3}=\frac{4y^6-1}{4y^3}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Luego: } L &= \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{4y^6-1}{4y^3}\right)^2} \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{16y^6+16y^{12}-8y^6+1}{16y^6}}\,dy \\
&= \int_1^2 \frac{\sqrt{16y^{12}+8y^6+1}}{4y^3}\,dy \\
&= \int_1^2 \frac{\sqrt{(4y^6+1)^2}}{4y^3}\,dy \\
&= \int_1^2 \frac{4y^6+1}{4y^3}\,dy \\
&= \int_1^2 \left(y^3+\frac{1}{4}\,y^{-3}\right)\,dx \\
&= \left(\frac{y^4}{4}-\frac{1}{8y^2}\right)\Big|_1^2 \\
&= 4-\frac{1}{32}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{123}{32}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 17

$(y+1)^2 = 4x^3$, desde $x=0$ hasta $x=1$

Solución

Obtengamos $\dfrac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita:

$$2(y+1)\frac{dx}{dy} = 12x^2 \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{y+1}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{6x^2}{y+1}\right)^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{36x^4}{(y+1)^2}}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{36x^4}{4x^3}}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx \\
&= \frac{2}{27}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{27}(10)^{3/2} - \frac{2}{27} \\
&= \frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)
\end{aligned}$$

7.5 Cálculo de trabajo con ayuda de la integral definida

Vamos a estudiar la aplicación de la integral definida al concepto de "trabajo".

Si una fuerza constante F actúa sobre un objeto desplazándolo una distancia x, a lo largo de una línea recta, y la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento, entonces el trabajo realizado W se expresa como el producto de la fuerza F por el camino recorrido.

Es decir: $W = F \cdot x$.

Cuando la fuerza *no* es constante, por ejemplo, cuando se contrae o estira un resorte, el trabajo no se puede expresar en forma tan simple.

Consideremos una partícula P que se desplaza sobre el eje x, desde el punto $(a,0)$ al punto $(b,0)$ por medio de una fuerza $f = F(x),\ x \in [a,b]$.

Dividamos el segmento $[a,b]$ en n partes arbitrarias de longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$, y tomemos en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario t_i como se muestra a continuación.

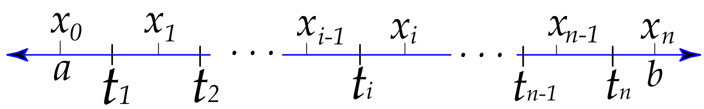


Figura 7.33:

Cuando la partícula se mueve de x_{i-1} a x_i, el trabajo realizado es aproximadamente igual al producto $F(t_i)\cdot\Delta x_i$.

Luego, la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} F(t_i)\cdot\Delta x_i$$

nos dará la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo el segmento $[a,b]$.

La suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(t_i)\cdot\Delta x_i$$

representa una suma integral, por lo que si

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(t_i)\cdot\Delta x_i$$

existe, entonces este expresa el trabajo realizado por la fuerza $f=F(x)$ al mover una partícula de a a b, a lo largo del eje x.

Se tiene entonces que

$$W=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(t_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b F(x)\,dx$$

siendo $F(x)$ la fuerza aplicada a la partícula cuando ésta se encuentra en el punto cuya coordenada es x.

Si la unidad de fuerza es el kilogramo, y si la unidad de distancia es el metro, entonces la unidad de trabajo es el *kilográmetro*. También pueden utilizarse como unidades de trabajo la libra-pie y el gramo-centímetro.

El alargamiento o la compresión de un resorte helicoidal, nos proporciona un ejemplo del trabajo realizado por una fuerza variable. La ley de Hooke afirma que la fuerza necesaria para estirar un resorte helicoidal, es proporcional a la elongación del resorte. Así, la fuerza necesaria para producir una elongación de x unidades, está dada por la expresión $F=kx$, donde k es la constante de proporcionalidad, que depende del material, del grosor del alambre, de la temperatura, etc.

Ejemplo 18

Un resorte tiene una longitud natural de 8 pulgadas. Si una fuerza de 20 libras estira el resorte 1/2 pulgada, determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 8 pulgadas a 11 pulgadas.

Solución

Consideremos el resorte ubicado a lo largo del eje x, con su extremo fijo en el origen:

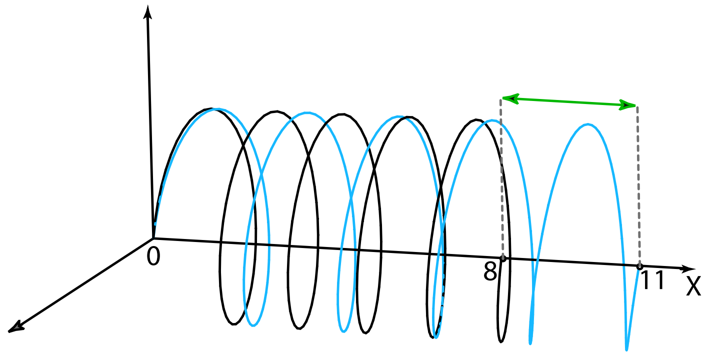


Figura 7.34:

Por la ley de Hooke se sabe que $F = kx$.

Como $x = 0,5$ pulgadas cuando $F = 20$ libras, entonces $20 = k(0,5)$ de donde $k = 40$.

Luego, $F = 40x$. Se desea calcular el trabajo realizado por esta fuerza si aumenta la extensión de 8 a 11 pulgadas. Luego:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^3 40x\,dx \\ &= 20x^2 \Big|_0^3 \\ &= 180 \text{ pulgadas-libras.} \end{aligned}$$

Ejemplo 19

Un resorte tiene una longitud natural de 10 pulgadas, y una fuerza de 30 libras lo estira 11,5 pulgadas. Determinar el trabajo realizado al estirar el resorte de 10 pulgadas a 12 pulgadas. Luego encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de 12 pulgadas a 14 pulgadas.

Solución

Como $F = kx$, y $x = 11,5$ pulgadas, cuando $F = 30$ libras, entonces $30 = 11,5k$, por lo que $k = 60/23$.

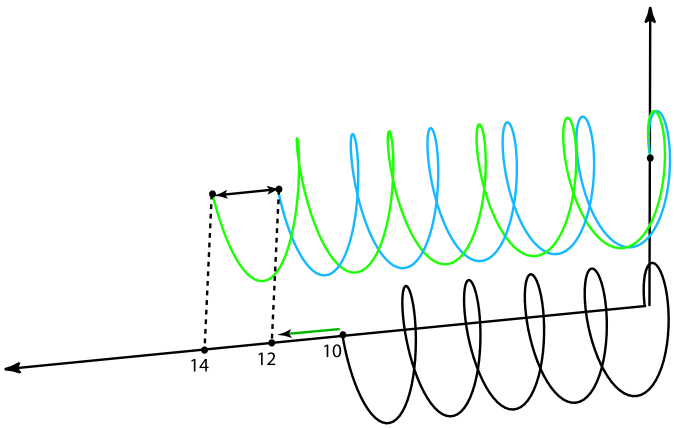


Figura 7.35:

El trabajo realizado para estirar el resorte de 10 a 12 pulgadas está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 \frac{60}{23} x \, dx \\ &= \frac{30}{23} x^2 \Big|_0^2 \\ &= \frac{120}{23} \text{ pulgadas-libras} \end{aligned}$$

El trabajo realizado para estirar el resorte de 12 a 14 pulgadas está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_2^4 \frac{60}{23} x \, dx \\ &= \frac{30}{23} x^2 \Big|_2^4 \\ &= \frac{480}{23} - \frac{120}{23} \\ &= \frac{360}{23} \text{ pulgadas-libras} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 20**

Una fuerza de 25 kg alarga un resorte 3 cm. Determine el trabajo requerido para alargar el resorte 2 cm más.

Solución

Como $F = kx$ y $x = 0,03$ m, cuando $F = 25$ kg, entonces $k = 2500/3$.

El trabajo requerido para alargar el resorte 2 cm más (es decir, hasta 5 cm), está dado por:

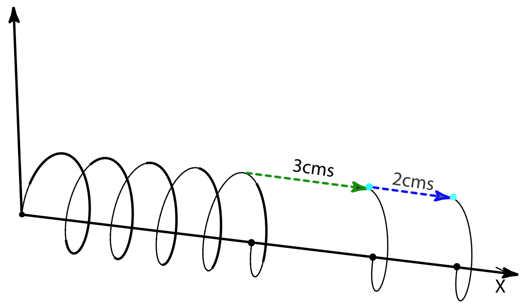


Figura 7.36:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{0,03}^{0,05} \frac{2500}{3}\, x\, dx \\
&= \frac{1250}{3}\, x^2 \bigg|_{0,03}^{0,05} \\
&= \frac{3,125}{3} - \frac{1,125}{3} \\
&= \frac{2}{3} \text{ kgm}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 21

Determinar el trabajo efectuado al alargar un resorte 6 cm, sabiendo que se necesita una fuerza de 15 kg para alargarlo 1 cm.

Solución

Según la ley de Hooke $F = kx$, por lo que $15 = k \cdot 0,01$, de donde $k = 1500$.

Luego, $F = 1500x$ y el trabajo efectuado para alargar el resorte 0,06 m está dado por:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{0}^{0,06} 1500\, x\, dx \\
&= 750\, x^2 \bigg|_{0}^{0,06} \\
&= 2,7 \text{ kgm}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 22

Un resorte tiene una longitud natural de 6cm. Si 1200 dinas lo comprimen 0,5 cm, calcular el trabajo efectuado al comprimirlo desde 0,6 cm hasta 4,5 cm. ¿Qué trabajo se requiere para hacer que el resorte llegue a 9 cm, partiendo de su estado comprimido de 4,5 cm?

Solución

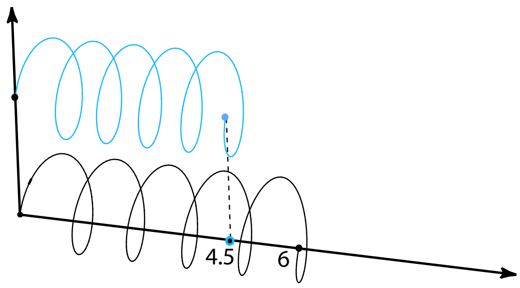
1. 

Figura 7.37:

Como $F = kx$ y $x = 0,5$ cm cuando $F = 1200$, entonces $k = 2400$. Luego $F = 2400 \cdot x$. El trabajo necesario para comprimir el resorte desde 6 hasta 4,5 cm está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{1,5} 2400\, x\, dx \\ &= 1200\, x^2 \Big|_0^{1,5} \\ &= 1200(1,5)^2 \\ &= 2700 \text{ ergs} \end{aligned}$$

2. dib sno281

El trabajo que se requiere para hacer que el resorte llegue a 9 cm, partiendo de su estado comprimido de 4,5 cm, está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_{1,5}^{3} 2400\, x\, dx \\ &= 1200\, x^2 \Big|_{1,5}^{3} \\ &= 1200 \cdot 9 - 1200 \cdot (1,5)^2 \\ &= 8100 \text{ ergs} \end{aligned}$$